This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math 2258.33

HARVARD COLLEGE LIBRARY

BOUGHT FROM THE INCOME OF THE FUND
BEQUEATHED BY
PETER PAUL FRANCIS DEGRAND
(1787–1855)
OF BOSTON

FOR FRENCH WORKS AND PERIODICALS ON THE EXACT SCIENCES
AND ON CHEMISTRY, ASTRONOMY AND OTHER SCIENCES
APPLIED TO THE ARTS AND TO NAVIGATION

SCIENCE CENTER LIBRARY

THÉORIE

DU

PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR

ET

DE L'ÉLIMINATION;

PRÉCÉDÉE

DE LA RÈGLE DES SIGNES DE DESCARTES.

Ouvrages du Baron Reynaud.

1°. *Traité d'Arithmétique* à l'usage des Ingénieurs du Cadastre, 5 fr.

2°. *Traité d'Arithmétique* à l'usage des Élèves qui se destinent aux Écoles royales Polytechnique, Militaire, de Marine, et des Forêts (16e édit., 1832) 4 fr. 50 c.

3°. *Elémens d'Algèbre*, 8e édition, 1830. 7 fr. 50 c.

4°. *Cours de Mathématiques*, à l'usage des Élèves de la Marine, par MM. *Reynaud* et *Nicollet*; 3 v. in-8, 1829.

1er vol., Arithmétique et Algèbre, par M. *Reynaud*. 5 fr.

2e vol., Géométrie et Trigonométrie, par M. *Nicollet*. 7 fr.

3e vol., Statique (sous presse).

5°. *Trigonométrie rectiligne et sphérique*, suivie des Tables de logarithmes de Lalande (3e édition), 3 fr.

6°. *Tables de logarithmes* (à sept décimales) pour les nombres et les lignes trigonométriques, in-12 (édition stéréotype) 1829. 3 fr. 50 c.

7°. *Traité d'Application* de l'Algèbre à la Géométrie. (2e édit. sous presse).

8°. *Manuel de l'Ingénieur du Cadastre*, in-4°, 12 fr.

9°. *Problèmes et développemens* sur les diverses parties des Mathématiques, 6fr.

10°. *Traité élémentaire de Mathématiques et de Physique*, suivi de notions sur la *Chimie* et sur l'*Astronomie*, à l'usage des Élèves qui se préparent aux examens pour l'École militaire de Saint-Cyr, pour la Marine et le Baccalauréat ès-lettres, 2e édit., revue, corrigée et considérablement augmentée; 2 vol. in-8° avec 21 pl. 1832. (Chaque volume se vend séparément 7 fr.) 12 fr. 50 c.

11°. *Théorèmes et Problèmes de Géométrie*, suivis de la *théorie des plans et des préliminaires de la Géométrie descriptive*, comprenant la partie exigée pour l'admission à l'École Polytechnique et à l'École militaire de Saint-Cyr, 1833, in-8° avec 20 pl. 5 fr.

12°. Élémens de *Géométrie descriptive*, suivis de la *Perspective*, des *Ombres*, de la *Gnomonique*, etc. (Sous presse.)

13°. *Traité d'Arpentage* de Lagrive, avec les Notes de Reynaud, 7 fr.

Notes sur Bezout.

14°. *Arithmétique de Bezout* avec les notes, 15e édit. 1832, 3 fr. 50 c.

15°. *Géométrie de Bezout* avec des notes contenant un grand nombre de Problèmes, et des *Élémens de Géométrie descriptive* (7e édition), 6 fr.

16°. *Algèbre* et Application de l'Algèbre à la Géométrie, avec les notes, 6 fr.

Les Notes sur l'Arithmétique, sur la Géométrie et sur l'Algèbre, se vendent séparément.

Nota. L'*Arithmétique* (16e édition), l'*Algèbre* (8e édition), l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie*, comprenant la *Trigonométrie*, et les Notes sur l'*Algèbre* et sur la *Géométrie* de Bezout, sont particulièrement destinées aux Élèves qui se proposent d'entrer à l'École royale Polytechnique et à l'École spéciale Militaire de Saint-Cyr. Ces ouvrages renferment les solutions des principales difficultés relatives aux examens.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

THÉORIE

DU

PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR

ET

DE L'ÉLIMINATION;

PRÉCÉDÉE

DE LA RÈGLE DES SIGNES DE DESCARTES;

PAR LE BARON REYNAUD,

EXAMINATEUR POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, etc.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1833

Math 2258.33

HARVARD COLLEGE
JUN 9 1923
LIBRARY
DEGRAND FUND

De la Règle des signes de Descartes. *Méthode nouvelle pour déterminer combien une équation contient au moins de racines imaginaires. Propriétés des facteurs premiers. Théorie complète du* plus grand commun diviseur, *et de l'*Élimination; *résolution de deux équations entre deux inconnues; examen des difficultés qui peuvent se présenter.*

§ Ier. *Règle des signes de Descartes.*

1. Lorsque l'on considère une suite de signes + et — qui se succèdent dans un ordre quelconque, on dit que deux signes consécutifs forment une *permanence* lorsqu'ils sont les mêmes, et une *variation* lorsqu'ils sont différens.

2. *Lorsqu'on change tous les signes de rang pair ou de rang impair, à partir du* 1er, *les permanences deviennent des variations, et les variations deviennent des permanences;* car en vertu de ce changement, deux signes consécutifs quelconques deviennent différens s'ils étaient semblables, et semblables s'ils étaient différens.

Par exemple, lorsque dans la suite

$$+ + + - + - - - + -$$

qui présente quatre permanences et cinq variations, on change les signes de rang pair, le résultat

$$+ - + + + + - + + +$$

offre quatre variations et cinq permanences.

Il est d'ailleurs évident que si l'on changeait à la fois tous les signes, le nombre des variations et celui des permanences resteraient les mêmes.

3. *Lorsqu'on introduit des signes* + *et* — *entre deux signes consécutifs de rang quelconque qui présentaient une variation, le nombre total des variations ne saurait jamais diminuer; mais il peut augmenter, et il peut rester le même;* car quelle que soit la suite de signes que l'on considère, en introduisant des signes + et — entre deux signes différens, + — ou — +, qui présentaient une variation, le résultat sera + ± ± ±... — ou — ± ± ±... +, et de quelque manière qu'on détermine les doubles signes ±, on trouvera au moins une variation pour passer de + à — ou de — à +. Si tous les signes intercalés sont semblables, ils n'introduiront aucune nouvelle variation ; s'ils sont différens, ils pourront introduire de nouvelles variations; cela est évident.

Par exemple, soit la suite

$$+ - - - + - +$$

qui présente 4 variations; suivant qu'on place les signes + + + ou + — entre le 4e et le 5e signe, le résultat

$$+ - - - + + + + - + \text{ ou } + - - - + - + - +$$

présente quatre ou six variations.

4. Nous supposerons dans tout ce qui va suivre, que l'équation proposée est ramenée à la forme

$$(1)\ldots\ x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \ldots + rx^2 + sx + t = 0\ ;$$

de sorte que son premier membre, que nous désignerons par $f(x)$, sera ordonné suivant les puissances entières positives et décroissantes de x. Tous les coefficiens, a, b, c,..., r, s, t, seront des nombres positifs ou négatifs.

Lorsque nous dirons que cette équation est *complète*, nous sous entendrons qu'aucun des coefficiens, a, b, c,..., r, s, t, n'est égal à zéro.

Quand le coefficient a de x^{m-1} est nul, on dit que l'*équation manque de second terme*.

Lorsque a et b sont nuls, on dit qu'il manque deux termes entre x^m et cx^{m-3}; et ainsi de suite.

Par exemple, l'équation $x^3 - 2x^2 + 7x - 5 = 0$ est *complète;* et l'équation $x^4 - 2x^2 + 5 = 0$, manquant de second terme, est *incomplète.*

5. *Dans toute équation complète du $m^{ième}$ degré, le nombre des permanences, ajouté au nombre des variations donne une somme égale au degré, m, de l'équation;* car les deux premiers termes offrent nécessairement une permanence ou une variation, et chacun des $m - 1$ autres termes détermine aussi une permanence ou une variation.

6. *Lorsqu'une équation est incomplète, on peut toujours la rendre complète, sans changer ses racines, en rétablissant les termes qui manquent et en les affectant du coefficient* ± 0.

Ainsi, l'équation incomplète $x^4 - x + 1 = 0$, peut être remplacée par l'une quelconque des équations complètes équivalentes,

$$x^4 - 0x^3 + 0x^2 - x + 1 = 0, \quad x^4 + 0x^3 - 0x^2 - x + 1 = 0,$$
$$x^4 + 0x^3 + 0x^2 - x + 1 = 0, \quad x^4 - 0x^3 - 0x^2 - x + 1 = 0.$$

En rétablissant de cette manière les termes qui manquent, le nombre des variations et des permanences peut augmenter ou diminuer dans les équations complètes que l'on obtient. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, la 1re des quatre équations complètes ne contient que des variations, tandis que chacune des trois autres présente deux variations et deux permanences.

7. *Lorsque dans l'équation $f(x) = 0$, on change x en $-x$, les racines ne font que changer de signe.* En effet; soit

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x+a')(x+b')(x+c')\ldots$$

on a

$$f(-x) = (-x-a)(-x-b)(-x-c)\ldots(-x+a')(-x+b')(-x+c')\ldots$$

et en changeant les signes de tous les facteurs binomes, il vient

$$f(-x) = \pm (x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x-a')(x-b')(x-c')\ldots$$

On voit que les racines de $f(x) = 0$ étant

$$+a,\ +b,\ +c,\ldots,\ -a',\ -b',\ -c',\ldots,$$

celles de la transformée, $f(-x) = 0$, sont

$$-a,\ -b,\ -c,\ldots,\ +a',\ +b',\ +c'\ldots.$$

Ce qui démontre le principe énoncé.

REMARQUE. *Quand l'équation* $f(x) = 0$ *est complète, l'équation* $f(-x) = 0$ *peut se déduire de* $f(x) = 0$, *en changeant dans* $f(x)$ *tous les signes des termes de rang pair à partir du premier terme;* car lorsqu'on change x en $-x$, dans l'équation complète

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \ldots + rx^2 + sx + t = 0,$$

suivant que m est un nombre pair ou impair, la transformée est

$$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + \ldots + rx^2 - sx + t = 0, \text{ ou}$$
$$-x^m + ax^{m-1} - bx^{m-2} + cx^{m-3} - \ldots + rx^2 - sx + t = 0;$$

et en changeant tous les signes, on voit que cette dernière équation revient à

$$x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + \ldots - rx^2 + sx - t = 0.$$

8. La *règle des signes de* DESCARTES, pour être exacte, doit s'énoncer de la manière suivante : 1°. *Dans toute équation, complète ou incomplète,* $f(x) = 0$, *ordonnée suivant les puissances décroissantes de l'inconnue* x, *le nombre des racines réelles positives est au plus égal au nombre des variations;* 2°. *lorsque l'équation est complète, le nombre des racines réelles négatives est au plus égal au nombre des permanences;* 3°. *quand l'équation est incomplète, le nombre des racines*

réelles négatives ne saurait surpasser le plus petit nombre des permanences que l'on peut obtenir en rétablissant les termes qui manquent et en les affectant successivement des coefficiens $+0$, -0, *comme il a été indiqué* (n° 6); *4°. enfin, lorsqu'une équation complète a toutes ses racines réelles, le nombre des racines positives est égal au nombre des variations, et le nombre des racines négatives est égal au nombre des permanences.*

Pour démontrer le principe énoncé (1°), nous ferons voir d'abord, que lorsqu'un polynome, qui ne contient qu'une seule lettre x, est ordonné suivant les puissances décroissantes de cette lettre, si l'on multiplie ce polynome par un binome $x - a$, dans lequel a représente un nombre positif, le produit contiendra au moins une variation de plus que le polynome qu'on a multiplié.

Par exemple, soit le polynome

$$x^7 + bx^6 - ex^5 - dx^4 - ex^3 + fx^2 + gx + h.$$

En le multipliant par $x - a$, le produit sera

$$x^8 + bx^7 - cx^6 - dx^5 - ex^4 + fx^3 + gx^2 + hx$$
$$- ax^7 - abx^6 + acx^5 + adx^4 + aex^3 - afx^2 - agx - ah.$$

Si l'on suppose que, a, b, c, d, e, f, g, h, sont des nombres positifs, les trois premiers termes du multiplicande offriront un seule variation depuis le 1er terme x^7, qui est censé affecté du signe $+$, jusqu'au 3e terme $-cx^5$; les trois termes correspondans, $+x^8$, $+(b-a)x^7$, $-(c+ab)x^6$, du produit, présenteront toujours une variation, car $-(c+ab)$ est nécessairement négatif. Le multiplicande n'offrant qu'une variation depuis le 3e terme $-cx^5$ jusqu'au 6e terme $+fx^2$, le 5e terme $-ex^3$ est nécessairement négatif; le produit de $-ex^3$ par $-a$ est donc positif; il suit de là que les termes correspondans du produit présentent au moins une variation depuis le 3e terme $-(c+ab)x^6$, jusqu'au 6e terme $+(f+ae)x^3$. Enfin, le multiplicande n'offrant aucune variation depuis le 6e terme $+fx^2$ jusqu'au dernier terme h, les

termes correspondans du produit admettent au moins une variation depuis le 6e terme $+(f+ae)x^3$ jusqu'au dernier terme $-ah$. Le produit contient donc au moins une variation de plus que le multiplicande. Les mêmes propriétés auraient lieu, si quelques-uns des coefficiens b, c, d, e, f, g, h, étaient nuls.

En général, soit un polynome M de la forme

$$x^m + \ldots + Ax^\alpha - Bx^{\alpha-1} - \ldots - Cx^\zeta + Dx^{\zeta-1} + \ldots \mp Gx^\delta \pm Hx^{\delta-1} \pm \ldots \pm Sx \pm T,$$

ordonné suivant les puissances décroissantes de x, et dans lequel les coefficiens A, B, ..., C, D, ..., G, H, ..., S, T, sont des nombres positifs. Tous les termes, indiqués par des points, compris entre x^m et $+Ax^\alpha$ sont positifs; tous les termes compris entre Ax^α et $Dx^{\zeta-1}$ sont négatifs; et ainsi de suite. Enfin, les termes $\mp Gx^\delta$, $\pm Hx^{\delta-1}$, sont de signes contraires, et tous les termes suivans conservent le signe de $\pm Hx^{\delta-1}$; c'est-à-dire que les signes supérieurs se correspondent, ainsi que les signes inférieurs. Les termes du polynome M offrent donc une seule variation depuis x^m jusqu'à $-Bx^{\alpha-1}$; puis une seule variation depuis $-Bx^{\alpha-1}$ jusqu'à $+Dx^{\zeta-1}$; et ainsi de suite. Enfin, les termes qui suivent $\mp Gx^\delta$ n'offrent aucune variation. Chaque série de termes de mêmes signes peut d'ailleurs se réduire à un seul terme. Si l'on multiplie le polynome M par $x-a$, le produit ordonné sera

$$x^{m+1} + \ldots - Bx^\alpha - \ldots + Dx^\zeta + \ldots \pm Hx^\delta \pm \ldots \pm Tx$$
$$- \ldots - aAx^\alpha + \ldots + aCx^\zeta - \ldots \pm aGx^\delta \mp \ldots \mp aSx \mp aT.$$

Cela posé : le multiplicande M n'a qu'une seule variation depuis le 1er terme x^m jusqu'au terme négatif $-Bx^{\alpha-1}$; et le coefficient $-(B+aA)$ de x^α dans le produit $M(x-a)$ étant négatif, les termes correspondans de ce produit offrent au moins une variation depuis x^{m+1} jusqu'à $-(B+aA)x^\alpha$. Par

une raison semblable, le multiplicande M n'ayant qu'une variation depuis $-Bx^{\alpha-1}$ jusqu'à $+Dx^{\zeta-1}$, le terme $-Cx^{\zeta}$ qui précède $Dx^{\zeta-1}$ est nécessairement négatif; le produit de ce terme par $-a$ est donc positif; il suit de là que les termes correspondans du produit $M(x-a)$ présentent au moins une variation depuis le terme négatif $-(B+aA)x^{\alpha}$ jusqu'au terme positif $+(D+aC)x^{\zeta}$. Et ainsi de suite. Enfin, la dernière série des termes du multiplicande ne présentant aucune variation, depuis $\pm Hx^{\delta-1}$ jusqu'à $\pm T$, les termes correspondans du produit $M(x-a)$ présentent au moins une variation depuis $\pm(H+aG)x^{\delta}$ jusqu'à $\mp aT$. *Le produit* $M(x-a)$ *contient donc au moins une variation de plus que le multiplicande* M.

Cette dernière propriété conduit au principe énoncé (1°). En effet, si l'on représente par $\varphi(x)$ le produit de tous les facteurs du 1er degré correspondans aux racines imaginaires et aux racines réelles négatives de l'équation (1)... $f(x)=0$, le 1er membre $f(x)$ de cette équation sera le produit de $\varphi(x)$ par tous les facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c$,..., correspondans aux racines réelles positives, a, b, c,..., de l'équation (1). Or, d'après ce qui vient d'être démontré, si $\varphi(x)$ admet γ variations, le produit de $\varphi(x)$ par $x-a$ contiendra au moins $\gamma+1$ variations; le produit de $(x-a)\varphi(x)$ par $x-b$ contiendra donc au moins $\gamma+2$ variations; et ainsi de suite. Par conséquent, si l'équation (1) admet p racines réelles positives a, b, c,...., le produit $f(x)$, de $\varphi(x)$ par $(x-a)(x-b)(x-c)$..., contiendra au moins $\gamma+p$ variations. De sorte que V désignant le nombre des variations de $f(x)$, on aura $V>\gamma+p$, ou $V=\gamma+p$.

Si γ n'est pas nul, p sera moindre que V; et si $\gamma=0$, on aura $p<V$ ou $p=V$. Le nombre p des racines réelles positives de l'équation $f(x)=0$ est donc au plus égal au nombre V des variations du premier membre $f(x)$. Ce qui démontre le principe énoncé (1°).

Ainsi, l'équation complète $x^4 - 3x^3 + 14x^2 + 6x - 18 = 0$, ayant trois variations, ne saurait admettre au plus que trois racines réelles positives; tandis que l'équation incomplète $x^7 - 7x + 6 = 0$, ayant deux variations, ne peut admettre plus de deux racines réelles positives.

2°. *Lorsque l'équation* $f(x) = 0$ *est* COMPLÈTE, *le nombre de ses racines réelles négatives est au plus égal au nombre des permanences de* $f(x)$. En effet, les racines réelles négatives de $f(x) = 0$, sont les racines réelles positives de l'équation $f(-x) = 0$ qui résulte du changement de x en $-x$ dans $f(x) = 0$, (n° 7); l'équation proposée étant *complète*, l'équation $f(-x) = 0$ peut se déduire de $f(x) = 0$, en changeant, dans $f(x) = 0$, les signes des termes de rang pair à partir du 1er terme (n° 7), et par ce changement de signes, les variations deviennent des permanences, tandis que les permanences deviennent des variations (n° 2). Par conséquent, si $f(x)$ contient P permanences, $f(-x)$ aura P variations; et d'après (1°), l'équation $f(-x) = 0$ admettra au plus P racines réelles positives; l'équation $f(x) = 0$ aura donc au plus P racines réelles négatives. Ce qui démontre le principe énoncé (2°).

Ainsi, l'équation complète $x^4 - 3x^3 + 14x^2 + 6x - 18 = 0$, n'ayant qu'une permanence, ne saurait admettre plus d'une racine réelle négative.

REMARQUE. Une équation complète, qui n'a que des variations, ne peut donc admettre aucune racine réelle négative.

3°. *Lorsque l'équation* $f(x) = 0$ *est incomplète, le nombre des racines réelles négatives peut surpasser celui des permanences; mais* il résulte de (2°) que *si l'on rétablit tous les termes qui manquent, en leur donnant le coefficient* ± 0, *le nombre des racines réelles négatives ne pourra jamais surpasser le plus petit nombre des permanences que l'on obtiendra en donnant successivement les signes* + *et* − *aux termes affectés du coefficient zéro.* Ce qui démontre le principe énoncé (3°).

Exemple. Soit l'équation incomplète $x^7 - x + 1 = 0$.

Cette équation n'a pas de permanence, et cependant elle admet nécessairement une racine réelle négative, puisqu'elle est de degré impair, et que son dernier terme est positif. Si l'on rétablit les termes qui manquent, en leur donnant ± 0 pour coefficient, on obtiendra l'équation *complète*

$$x^7 \pm 0x^6 \pm 0x^5 \pm 0x^4 \pm 0x^3 \pm 0x^2 - x + 1 = 0,$$

et il est facile de voir que de quelque manière qu'on détermine les doubles signes, cette transformée ne saurait admettre moins d'une permanence. L'équation proposée ne peut donc pas admettre plus d'une racine réelle négative (2°). Mais l'équation $x^7 - x + 1 = 0$ n'ayant que deux variations, ne saurait admettre plus de deux racines réelles positives (1°). Cette équation admet donc au moins quatre racines imaginaires.

4°. Enfin, *lorsqu'une équation complète* $x^m \pm ax^{m-1} + \text{etc} = 0$, *a toutes ses racines réelles, le nombre*, p, *des racines positives est égal au nombre* V *des variations, et le nombre*, n, *des racines négatives est égal au nombre* P *des permanences.* En effet : l'équation étant complète, V + P est égal au degré m de cette équation (n° 5) ; et les m racines étant réelles, on a $p + n = m$. Donc $V + P = p + n$; d'où $V - p = n - P$.

Or, d'après (1°), p ne peut surpasser V. D'ailleurs, si p était moindre que V, la relation $V - p = n - P$ donnerait $n > P$; le nombre n des racines réelles négatives serait donc plus grand que le nombre P des permanences ; ce qui est contraire à ce qui a été démontré (2°). On a donc $p = V$, et par suite $n = P$. Ce qui démontre la propriété énoncée (4°).

Par exemple, soit l'équation complète

$$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18 = 0.$$

Cette équation, dont toutes les racines sont réelles, présentant trois variations et une permanence, on est certain qu'elle a trois racines positives et une racine négative. Ces racines sont $+1$, $+2$, $+3$ et -3.

9. *Le nombre des racines réelles négatives de l'équation*

incomplète $f(x)=0$, *est au plus égal au nombre des variations de l'équation* $f(-x)=0$ *que l'on obtient par le changement de* x *en* $-x$ *dans* $f(x)$; car les racines réelles négatives de $f(x)=0$, sont les racines réelles positives de $f(-x)=0$ (n° 7), et d'après le principe du n° 8 (1°), le nombre de ces racines est au plus égal au nombre des variations de $f(-x)=0$.

Remarque. Lorsqu'on voudra découvrir combien une équation incomplète peut admettre au plus de racines réelles négatives, on devra faire usage du principe précédent, parce qu'il est plus facile à appliquer que celui du n° 8 (3°).

Exemple. Soit $f(x)=x^7-x+1$; on a $f(-x)=-x^7+x+1$; et comme $f(-x)$ n'a qu'une variation, l'équation $f(x)=0$ ne saurait admettre plus d'une racine réelle négative. Ce qui s'accorde avec le résultat obtenu (n° 8, 3°).

10. Les propriétés précédentes fournissent deux méthodes pour *découvrir si une équation incomplète du* $m^{ième}$ *degré,* $f(x)=0$, *admet des racines imaginaires.*

1re Méthode. On change x en $-x$ dans $f(x)$; si les polynomes $f(x)$, $f(-x)$, admettent respectivement V et V′ variations, l'équation $f(x)=0$ contiendra au plus V racines réelles positives (n° 8, 1°) et V′ racines réelles négatives (n° 9); de sorte qu'il y aura au plus $V+V'$ racines réelles. *L'équation* $f(x)=0$ *admettra donc au moins* $m-(V+V')$ *racines imaginaires.*

1er Exemple. Soit $f(x)=x^7-x+1$; on a $V=2$,

$$f(-x)=-x^7+x+1,\quad V'=1.$$

Par conséquent, l'équation $f(x)=0$ admet au plus deux racines réelles positives, et une racine réelle négative; elle a donc au moins quatre racines imaginaires.

2e Exemple. Soit $f(x)=x^{10}-x^5-1$; on a $V=1$,

$$f(-x)=x^{10}+x^5-1,\quad V'=1.$$

Par conséquent, l'équation $f(x)=0$ admet au plus deux racines réelles qui sont de signes contraires, et elle a au moins

huit racines imaginaires. Mais, cette équation de degré pair ayant son dernier terme négatif, admet au moins deux racines réelles; elle a donc huit racines imaginaires.

3e Exemple. Soient les *équations binomes*

$$x^{2n+1}-1=0,\quad x^{2n}-1=0,\quad x^{2n+1}+1=0,\quad x^{2n}+1=0.$$

En y changeant le signe de x, elles deviennent

$$-x^{2n+1}-1=0,\quad x^{2n}-1=0,\quad -x^{2n+1}+1=0,\quad x^{2n}+1=0.$$

Par conséquent, la 1re équation ne peut avoir qu'une seule racine réelle, et cette racine est positive; la 2e équation ne peut avoir que deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative; la 3e équation ne peut avoir qu'une racine réelle, et cette racine est négative; enfin la 4e équation n'a aucune racine réelle.

Remarque. Quand l'équation $f(x)=0$ est *complète*, le nombre V des variations ajouté au nombre P des permanences donne une somme égale au degré m de $f(x)$, et $f(-x)$ a P variations; donc $V'=P$ et $m-(V+V')=0$. On ne peut donc pas en conclure que $f(x)=0$ admet des racines imaginaires.

2e Méthode. Soit l'équation incomplète du $m^{ième}$ degré $f(x)=0$, qui admet V variations. On rétablit tous les termes qui manquent en leur donnant ± 0 pour coefficient; cette équation, ainsi complétée, admet au moins V variations (n° 3). On choisit ceux des doubles signes qui fournissent le plus grand nombre possible de variations; si ce *maximum* du nombre des variations est $V+\delta$, *l'équation* $f(x)=0$ *admettra au moins* δ *racines imaginaires.*

En effet, l'équation proposée $f(x)=0$, qui a V variations, ne peut admettre plus de V racines réelles positives (n° 8, 1°); mais lorsqu'on a disposé des doubles signes de manière que l'équation complétée renferme $V+\delta$ variations, le nombre des permanences devenant $m-(V+\delta)$, l'équation ne peut admettre plus de $m-(V+\delta)$ racines réelles négatives (n° 8, 2°); le nombre total des racines réelles ne peut donc pas être plus

grand que $V + m - (V + \delta)$ ou que $m - \delta$; le nombre des racines imaginaires ne peut donc pas être plus petit que δ. Ce qui démontre le principe énoncé.

On voit que *le nombre des racines imaginaires d'une équation incomplète* $f(x) = 0$ *est au moins égal à la différence* δ, *entre le nombre* V *des variations de* $f(x)$, *et le plus grand nombre* $V + \delta$ *de variations dont* $f(x)$ *est susceptible, en rétablissant les termes qui manquent et en les affectant successivement des coefficiens* $+0$, -0.

1er Exemple. Soit $f(x) = x^7 - x + 1$; on a $V = 2$;

et en rétablissant les termes qui manquent, de manière à obtenir le plus grand nombre possible de variations, l'équation résultante $x^7 - 0x^6 + 0x^5 - 0x^4 + 0x^3 - 0x^2 - x + 1 = 0$, contient six variations; l'équation proposée admet donc au moins $6 - 2$ ou quatre racines imaginaires.

2e Exemple. Soit $f(x) = x^{10} - x^5 - 1 = 0$. On a $V = 1$.

L'équation équivalente

$$x^{10} \pm 0x^9 \pm 0x^8 \pm 0x^7 \pm 0x^6 - x^5 \pm 0x^4 \pm 0x^3 \pm 0x^2 \pm 0x - 1 = 0,$$

ne pouvant pas admettre plus de neuf variations, on a $V + \delta = 9$. Donc $\delta = 8$. L'équation $f(x) = 0$, a donc au moins huit racines imaginaires.

La 1re méthode a conduit aux mêmes résultats (pages 10 et 11).

11. En général, *lorsqu'à l'aide des doubles signes qu'on peut assigner aux termes affectés du coefficient* ± 0, *on obtient deux valeurs différentes* V', V'', *du nombre des variations, l'équation admet au moins* $V' - V''$ *racines imaginaires.*

Ce principe conduit aux propriétés suivantes :

1°. *Lorsqu'il ne manque qu'un seul terme entre deux termes consécutifs de signes contraires, on ne peut pas en conclure que l'équation admet des racines imaginaires;* car quel que soit le signe qu'on donne au coefficient ± 0 du terme qui

manquait, les trois termes qui en résultent, présentent toujours une permanence et une variation.

2°. *Lorsqu'il manque un ou deux termes entre deux termes de même signe, l'équation admet au moins deux racines imaginaires;* car on peut toujours disposer des signes des termes affectés du coefficient ± 0, de manière que le nombre des variations augmente de deux unités.

Par exemple, s'il manque un seul terme entre les deux termes positifs $+ ax^{\alpha}$, $+ bx^{\alpha-2}$, les trois termes $+ ax^{\alpha} \pm 0x^{\alpha-1} + bx^{\alpha-2}$ n'offriront aucune variation, si l'on prend le signe supérieur; et ils présenteront deux variations, en prenant le signe inférieur.

S'il manque deux termes entre les termes positifs $+ ax^{\alpha}$, $+ bx^{\alpha-3}$, les quatre termes $+ ax^{\alpha} \pm 0x^{\alpha-1} \pm 0x^{\alpha-2} + bx^{\alpha-3}$ ne présenteront aucune variation en prenant tous les signes supérieurs; et de quelque autre manière qu'on dispose des doubles signes, il y aura deux variations.

Ainsi, lorsque p est positif, chacune des équations incomplètes $x^m + px^{m-2} + \text{etc.} = 0$, $x^m + px^{m-3} + \text{etc.} = 0$, admet au moins deux racines imaginaires.

3°. On prouvera d'une manière absolument semblable, que n désignant un nombre entier positif, *s'il manque* $2n$ *ou* $2n+1$ *termes entre deux termes de signes contraires, l'équation admet au moins* $2n$ *racines imaginaires,* et que *s'il manque* $2n+1$ *ou* $2n+2$ *termes entre deux termes de même signe, l'équation admet au moins* $2n+2$ *racines imaginaires.*

1er Exemple. Soit $f(x) = x^7 - x + 1$. On a $2n+1 = 5$, $2n = 4$. L'équation $f(x) = 0$ admet donc au moins quatre racines imaginaires. Ce qui s'accorde avec le résultat obtenu par les deux méthodes du n° 10 (1er *exemple*).

2e Exemple. Soit $f(x) = x^{10} - x^5 - 1$. Il manque quatre termes entre $+ x^{10}$ et $- x^5$; l'équation $f(x) = 0$ admet donc au moins quatre racines imaginaires. Mais, il manque en outre quatre autres termes entre $- x^5$ et $- 1$; l'équation contient

donc au moins quatre autres racines imaginaires. Il y a donc au moins huit racines imaginaires. Ce qui s'accorde avec le résultat obtenu par les deux méthodes du n° 10 (2e *exemple*).

3e Exemple. Soient les équations binomes (1)... $x^{2n+1} - 1 = 0$; (2)... $x^{2n} - 1 = 0$, (3)... $x^{2n+1} + 1 = 0$, (4)... $x^{2n} + 1 = 0$.

Il manque $2n$ termes entre $+ x^{2n+1}$ et $- 1$; l'équation (1) a donc au moins $2n$ racines imaginaires.

Il manque $2n - 1$ termes entre x^{2n} et $- 1$; l'équation (2) a donc au moins $2n - 2$ racines imaginaires.

Il manque $2n$ termes entre x^{2n+1} et $+ 1$; l'équation (3) a donc au moins $2n$ racines imaginaires.

Enfin, il manque $2n - 1$ termes entre x^{2n} et $+ 1$; l'équation (4) a donc au moins $2n$ racines imaginaires.

Ces résultats s'accordent avec ceux qui ont été obtenus par la 1re méthode du n° 10 (3e *exemple*).

12. Lorsque tous les termes qui manquent dans une équation sont compris constamment entre deux termes de signes contraires dans lesquels les exposans de x ne diffèrent que de deux unités, le nombre des variations reste le même, quels que soient les signes qu'on assigne aux termes que l'on rétablit avec le coefficient ± 0 (n° 11, 1°), et par suite, les méthodes précédentes ne peuvent pas faire connaître si l'équation donnée a des racines imaginaires. Dans tous les autres cas, les méthodes des nos 10 et 11 font découvrir combien l'équation incomplète admet au moins de racines imaginaires.

13. Pour *déterminer combien une équation complète* (1)... $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \text{etc.} = 0$, *a au moins de racines imaginaires*, on fait disparaître son second terme en posant $x = y - \frac{a}{m}$; la *transformée* est

$$(2)\ldots\ y^m + \left\{b - \frac{(m-1)\,a^2}{2m}\right\} y^{m-2} + \text{etc.} = 0.$$

Chacune des équations (1) et (2), admettant le même nombre de racines réelles, il suffira de déterminer par l'une quelconque des méthodes précédentes, combien l'équa-

tion (2), qui est incomplète, admet au moins de racines imaginaires.

Lorsque le coefficient de y^{m-s} est positif, ce qui exige que b soit positif, l'équation (2) a au moins deux racines imaginaires (n° 11, 2°).

Par exemple, soit l'équation

$$(3)\ldots\quad x^4+4x^3+8x^2+x-1=0\,;$$

en faisant $x=y-1$, la *transformée* sera $y^4+2y^2-7y+3=0$; l'équation (3) a donc au moins deux racines imaginaires. D'ailleurs, l'équation (3) ayant son dernier terme négatif, a au moins deux racines réelles de signes contraires; on est donc certain que cette équation a deux racines réelles de signes contraires et deux racines imaginaires.

Lorsque l'équation (2) se trouve dans le cas indiqué (n° 12), les méthodes que nous avons exposées ne peuvent pas faire connaître si l'équation (1) a des racines imaginaires.

§ II. *Propriétés des facteurs premiers. Théorie du plus grand commun diviseur.*

14. Lorsque nous parlerons d'une quantité *entière*, il s'agira toujours d'un nombre entier, ou d'un polynome *rationnel* et *entier* de la forme $ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\ldots+rx^2+sx+t$, dans lequel les exposans seront des nombres entiers positifs, et tous les coefficiens seront des nombres entiers positifs ou négatifs. Le *degré* d'une quantité littérale sera exprimé par la plus forte somme des exposans des lettres contenues dans ses différens termes. Ainsi, le trinome $4b^2x^7-4b^5x^3+12$, est du 9ᵉ degré; il est du 7ᵉ degré par rapport à x et du 5ᵉ degré par rapport à b. Le monome $7a^2b^4x^3$ est du 9ᵉ degré.

Quand nous dirons qu'une quantité littérale entière, monome ou polynome, est *plus grande* qu'une autre, nous sous-entendrons que la première quantité est d'un *degré* plus élevé que la seconde. Par exemple, le polynome $a^2b^2-5ab+7$ est *plus grand* que $a^3-2ab+4b^2-3$,

car le 1er polynome est du 4e degré, tandis que le 2e n'est que du 3e degré. Ces deux polynomes sont du même degré par rapport à b.

Lorsque nous dirons qu'une quantité entière A est *divisible* par une quantité entière B, ou ce qui revient au même, que B *divise* A, il faudra entendre que la division de A par B donne un quotient entier Q et un reste nul; de sorte que $A = BQ$.

On dit qu'une quantité est *première*, lorsqu'elle n'est *divisible* par aucune quantité rationnelle et entière autre qu'elle même et l'unité. Telles sont les quantités b, $a^2 - b$, $x - 1$.

Il suit de cette définition que deux quantités premières ne sont jamais divisibles exactement l'une par l'autre.

Deux quantités sont dites *premières entre elles*, lorsqu'il n'existe aucune quantité entière, autre que l'unité, qui les divise l'une et l'autre. Ainsi, les quantités $5ab$, $7def$, sont premières entre elles; on dit aussi que $5ab$ est *premier* avec $7def$. Deux quantités premières sont toujours premières entre elles.

15. *Lorsqu'une quantité première* P *ne divise pas une quantité entière* A, *on peut en conclure que* P *est premier avec* A; car s'il existait un facteur commun à ces deux quantités, ce facteur différerait de P et diviserait P; ce qui ne saurait avoir lieu, puisqu'on suppose que P est premier.

16. Théorème. *Une quantité première* P, *qui ne divise aucun des facteurs d'un produit* AB, *de deux quantités entières* A, B, *ne saurait diviser ce produit.*

Cette propriété a été démontrée dans l'Arithmétique pour le cas où A, B, P, sont des nombres entiers. Considérons les cas où ces quantités ne contiennent pas plus d'une lettre; il y en aura quatre à examiner.

Premier cas. A *ou* B *contient la lettre* x, P *est numérique.*

Soit $$A = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + \text{etc.};$$

a, b, etc., étant des nombres entiers, ainsi que α, β, etc.

En multipliant A par B, on a $AB = Bax^{\alpha} + Bbx^{\beta} + \text{etc.}$

Pour que le produit AB fût divisible par le nombre P, il faudrait que les coefficiens des diverses puissances de x, dans ce produit, fussent divisibles par P (n° 27, 4°). D'après l'hypothèse, P est un nombre premier qui ne divise ni A ni B. Puisque ce nombre ne divise point A, il ne divise pas tous les coefficiens a, b, etc. de ce polynome; donc il ne doit pas diviser tous les produits Ba, Bb, etc.; donc il ne divise point AB.

Second cas. A *et* B *contiennent* x, P *est numérique.*

Nommons A′ l'ensemble de tous les termes de A, dont les coefficiens sont des multiples de P, et A″ l'ensemble de tous les autres termes : on pourra écrire $A = A' + A''$. Décomposons B de la même manière, et soit $B = B' + B''$: on aura

$$AB = (A' + A'')(B' + B'') = A'B' + A'B'' + A''B' + A''B''.$$

Les trois premières parties de ce produit sont divisibles par P; et, pour démontrer que AB n'est pas divisible par P, il suffit de faire voir que la dernière partie A″B″ ne l'est point.

Soient ax^{α} et bx^{β} les termes de A″ et de B″, dans lesquels la lettre x est au plus haut exposant, le terme $abx^{\alpha+\beta}$ fera partie du produit A″B″, et ne se réduira avec aucun autre. Pour que A″B″ fût divisible par le nombre P, il faudrait que les coefficiens de tous les termes de ce produit le fussent; donc ab devrait se diviser par P. Or, P est un nombre premier qui ne divise aucun des coefficiens de A″ et B″; donc il ne divise ni a ni b; donc il ne divise pas ab; donc il ne divise pas A″B″; donc il ne divise pas le produit AB.

Troisième cas. A *ou* B *contient* x, et P *contient aussi* x.

Supposons que ce soit le facteur A qui renferme x. Si la division de AB par P donnait un quotient entier Q, on aurait $AB = PQ$; et, en représentant par F, F′, F″..., les facteurs premiers du nombre B, cette égalité pourrait s'écrire ainsi :

$$AFF'F''\ldots = PQ.$$

Le premier membre étant divisible par F, le produit PQ doit l'être aussi ; mais P est une quantité première qui contient x ; donc elle n'est divisible par aucun nombre ; donc Q est divisible par F, sans quoi le produit PQ ne pourrait pas être divisible par F (1er ou 2e *cas*). Soit Q′ le quotient de Q par F, on aura

$$AF'F''\ldots = PQ'.$$

On prouvera de la même manière que Q′ doit être divisible par F′ ; et, en nommant Q″ le quotient, on aura

$$AF''\ldots = PQ''.$$

En continuant ainsi jusqu'à ce que le premier membre ne renferme plus que A, on arrivera à une égalité telle que

$$A = PQ_1,$$

dans laquelle Q_1 serait encore une quantité entière. De là on conclurait que A est divisible par P, ce qui est contraire à l'hypothèse ; donc AB n'est pas divisible par P.

Quatrième cas. A *et* B, *ainsi que* P, *contiennent* x.

Supposons que A soit d'un degré plus élevé que P ; divisons A par P, et poussons la division jusqu'à ce qu'on trouve un reste de degré moindre que P. Il est possible que le quotient et le reste renferment des coefficiens fractionnaires ; mais si l'on prend un nombre M, divisible par chacun des dénominateurs, et qu'on multiplie le dividende par M, avant de faire la division, il est facile de voir qu'alors les fractions disparaîtront entièrement. Désignons par Q le quotient entier qu'on obtient de cette manière, et par A′ le reste ; on aura

$$MA = PQ + A'.$$

A′ ne peut pas être zéro, autrement le produit MA serait divisible par le polynome premier P ; ce qui est impossible (3e *cas*). Multiplions les deux membres de cette égalité par B, et divisons-les ensuite par P, il vient

$$M\frac{AB}{P} = BQ + \frac{A'B}{P}.$$

Donc, si AB était divisible par P, le produit A'B le serait aussi.

Supposons que A' soit algébrique, et divisons P par A'. Soit N le nombre par lequel il faut multiplier P pour arriver, sans fractions, à un reste de degré moindre que A'. En nommant Q' le quotient, et A'' le reste, on aura

$$NP = A'Q' + A'';$$

et de là on tire, en multipliant par B et en divisant par P,

$$NB = \frac{A'B}{P}\,Q' + \frac{A''B}{P};$$

donc la divisibilité de A'B par P entraînerait celle de A''B. Remarquons d'ailleurs que A'' ne peut être zéro ; car, si cela était, il faudrait que NP fût divisible par chaque facteur algébrique premier de A' ; ce qui est impossible (3e *cas*).

Divisons encore P par A'' : nommons N' le nombre par lequel il faut multiplier le dividende, nommons Q'' le quotient et A''' le reste, il viendra

$$N'P = A''Q'' + A'''; \quad \text{d'où} \quad N'B = \frac{A''B}{P}\,Q'' + \frac{A'''B}{P};$$

donc A'''B serait aussi divisible par P.

En continuant ainsi, l'on doit arriver à un reste numérique A_t, et le produit A_tB devrait encore se diviser par P ; ce qui est impossible (3e *cas*) ; donc le produit AB n'est pas divisible par P.

Les quatre cas que nous venons d'examiner sont les seuls qui soient à considérer lorsque les trois quantités A, B, P, ne sont pas numériques à la fois, et qu'elles ne contiennent pas plus d'une lettre. Passons aux cas où il y a deux lettres x et y dans l'une de ces quantités, ou dans deux d'entre elles, ou dans toutes les trois. Ces cas sont aussi au nombre de quatre, savoir :

Lorsqu'un seul des facteurs A *et* B *contient la lettre* x, *et que* P *ne la contient point.*

Lorsque les deux facteurs A *et* B *contiennent la lettre* x, *et que* P *ne la contient point.*

Lorsqu'un seul des facteurs A *et* B *contient la lettre* x, *et que* P *la contient aussi.*

Enfin, lorsque les deux facteurs A *et* B *contiennent la lettre* x, *et que* P *la contient aussi.*

Les démonstrations sont semblables à celles qui viennent d'être exposées, et, pour cette raison, nous nous dispenserons de les rapporter. La seule différence consiste en ce que les quantités qui, précédemment, étaient supposées numériques, peuvent être ici des quantités algébriques dépendantes de la lettre y.

De même que les cas où les quantités A, B, P, ne renferment pas plus d'une seule lettre, servent à démontrer la proposition pour les cas où ces quantités peuvent contenir deux lettres; de même ceux-ci serviront à s'élever au cas où ces quantités pourraient contenir trois lettres; et ainsi de suite, quel que soit le nombre des lettres. Le théorème général doit donc être regardé comme démontré.

Nota. La démonstration du n° 16 est due à M. *Lefebure de Fourcy*, examinateur pour l'admission à l'École Polytechnique.

17. 1°. *Une quantité première* P, *qui ne divise aucun des facteurs entiers* A, B, C, D..., *d'un produit* ABCD..., *ne saurait diviser ce produit.* Car, P ne divisant ni A ni B, il résulte du principe du n° 16, que P ne divisera pas le produit AB; par une raison semblable, P ne divisant ni AB ni C, ne divise pas le produit ABC de AB par C; et ainsi de suite.

2°. *Toute quantité première qui divise le produit de plusieurs facteurs entiers, divise nécessairement l'un des facteurs de ce produit.* Cela résulte de (1°).

Toute quantité première qui divise a^m, divise donc a.

3°. *Une quantité entière n'est décomposable que d'une seule manière en facteurs premiers.* C'est-à-dire, que de quelque manière qu'on décompose une quantité en facteurs premiers,

on retrouvera toujours les mêmes facteurs affectés des mêmes exposans. Cela se réduit à faire voir que si deux produits ABCD..., *abcd*..., de facteurs premiers, sont égaux, on aura nécessairement $A = a$, $B = b$, $C = c$, etc.

Or, ABCD... étant divisible par A, le produit *abcd*... sera nécessairement divisible par A; A divisera donc l'un des facteurs premiers $a, b, c, d\ldots$, (2°); A sera donc égal à l'un de ces facteurs, au facteur a par exemple; l'égalité ABCD... = *abcd*..., deviendra ABCD... = A*bcd*..., et en divisant les deux membres de cette dernière égalité par A, on aura BCD... = *bcd*...

De même, BCD... étant divisible par B, le produit *bcd*... sera aussi divisible par B; B divisera donc l'un des facteurs premiers $b, c, d\ldots$; B sera donc égal à l'un de ces facteurs, au facteur b par exemple. Et ainsi de suite.

Ces raisonnemens conviennent évidemment au cas où il y aurait des facteurs égaux. Par exemple, si $B = A$, il faudra que $b = a$. Et en général, si ABCD..., renferme n facteurs premiers égaux à a, il faudra que *abcd*..., contienne également n facteurs égaux à a.

Ce qui démontre le principe énoncé (3°).

4°. *Lorsqu'une quantité* C, *qui divise le produit* AB *de deux facteurs entiers* A, B, *est première avec le facteur* A, *cette quantité* C *divise nécessairement l'autre facteur* B.

Soient $a, b, c, d, \ldots$, les facteurs premiers (égaux ou inégaux) de C; de sorte que C = *abcd*.... Il s'agit de prouver que B est le produit de *abcd*..., par une quantité entière. Or, le quotient de AB par C est une quantité entière Q; on a donc

$$(1)\ldots\ AB = CQ = abcd\ldots Q.$$

D'après cette relation, a divise AB; d'ailleurs C étant premier avec A, le facteur premier a de C ne saurait diviser A; a divise donc B(2°); si B′ désigne le quotient, on aura $B = aB'$. Substituant cette valeur de B dans (1) et divisant les deux membres par a, on trouvera (2)... $AB' = bcd\ldots Q$.

On déduira de même de la relation (2), que b divise B' ; de sorte que $B' = bB''$, d'où $B = abB''$. Si l'on substitue la valeur bB'' de B', dans (2), et si l'on divise les deux membres par b, il viendra (3)... $AB'' = cd...Q$.

On déduira de même, de (3), que c divise B'' ; de sorte que $B'' = cB'''$; d'où $B = abcB'''$, et (3) donne (4)...$AB''' = d...Q$.

En continuant ces décompositions, on parviendra à épuiser tous les facteurs premiers (égaux ou inégaux) de C, et l'on verra ainsi que B sera le produit de $abcd...$, par une quantité entière. Ce qui démontre la propriété énoncée.

Par exemple, si $C = abc$, la relation (4) deviendra $AB''' = Q$, et l'on aura $B = abcB''' = CB'''$; B sera donc divisible par C.

5°. *Toute quantité* A, PREMIÈRE *avec chacune des quantités* B, C, D,..., *est aussi première avec le produit* P *des quantités* B, C, D,... ; car autrement, A et P seraient divisibles par une quantité première δ ; δ devrait donc diviser l'un des facteurs B, C, D,..., du produit P (2°) ; il existerait donc un facteur commun δ entre A et l'une des quantités B, C, D,... ; A ne serait donc pas premier avec chacune des quantités B, C, D,... ; ce qui est contre l'hypothèse.

6°. *Lorsque deux quantités entières* A, B, *sont premières entre elles, deux puissances entières positives quelconques* A^m, B^n, *de ces quantités, sont aussi premières entre elles*. En effet, si ces puissances n'étaient pas premières entre elles, il existerait une quantité première δ qui diviserait A^m et B^n ; δ diviserait donc A et B (2°) ; ce qui ne saurait avoir lieu, puisque A et B sont supposés premiers entre eux.

7°. *Lorsqu'une quantité entière* A *est divisible par des quantités entières* α, ζ, γ,..., *qui sont premières entre elles deux à deux*, A *est aussi divisible par le produit* $\alpha\zeta\gamma...$, *de ces quantités*. En effet, la division de A par α donnera un quotient exact A' qui sera entier ; on aura $A = \alpha A'$. Or, ζ divise A ; ζ divise donc $\alpha A'$; et comme ζ est supposé premier avec α, il faut que ζ divise A' (4°). La division de A' par ζ fournira un quotient exact

A'' qui sera entier ; on aura $A' = \mathcal{C}A''$; d'où $A = \alpha\mathcal{C}A''$. La quantité A est donc divisible par $\alpha\mathcal{C}$. Mais, γ divise A ; γ divise donc $\alpha\mathcal{C}A''$; γ divise donc l'un des facteurs α, $\mathcal{C}$, A'' (2°) ; et comme γ ne saurait diviser ni α, ni $\mathcal{C}$, il faut que γ divise A'' ; si A''' désigne le quotient, on aura $A'' = \gamma A'''$; d'où $A = \alpha\mathcal{C}\gamma A'''$. La quantité A est donc divisible par $\alpha\mathcal{C}\gamma$. Et ainsi de suite.

8°. *Lorsque des quantités* α, $\mathcal{C}$, γ, ..., *étant premières entre elles deux à deux, une quantité entière* A *est divisible par chacune des puissances entières positives* α^m, $\mathcal{C}^n$, γ^p, ..., *on est certain que* A *sera divisible par le produit* $\alpha^m\mathcal{C}^n\gamma^p$..., *de ces puissances ;* car les quantités α, $\mathcal{C}$, γ, ..., étant supposées premières entre elles deux à deux, les puissances α^m, $\mathcal{C}^n$, γ^p, ..., sont aussi premières entre elles deux à deux (6°) ; et par suite A sera divisible par $\alpha^m\mathcal{C}^n\gamma^p$..., (7°).

9°. *Lorsque des quantités entières* A, B, C, D, ..., *sont premières avec chacune des quantités entières* P, Q, R, S, ..., *le produit des puissances entières positives d'un nombre quelconque des quantités* A, B, C, D, ..., *est premier avec le produit des puissances entières positives d'un nombre quelconque des autres quantités* P, Q, R, S, ...

Par exemple, $A^3B^2C^4$ est premier avec P^4Q^5 ; car s'il existait un facteur premier δ commun à $A^3B^2C^4$ et P^4Q^5, la quantité première δ diviserait l'un des facteurs A^3, B^2, C^4, et l'un des facteurs P^4, Q^5, (2°) ; supposons donc que δ divise B^2 et Q^5 ; δ diviserait B et Q (2°) ; ce qui est impossible, puisque B et Q sont premiers entre eux, par hypothèse.

10°. *Un diviseur entier quelconque* D *d'une quantité entière* A, *ne peut contenir que des facteurs premiers de* A ; *et ces facteurs ne sauraient entrer dans* D *à des puissances plus élevées que dans* A.

En effet ; puisque D divise A, le quotient sera une quantité entière A', et l'on aura $A = DA'$. Tout facteur premier α de D, divisant DA', devra diviser A ; α sera donc l'un des facteurs premiers de A. Soient m et n, les plus forts exposans de α dans A et D ; la division de A par α^m donnera un quotient Q qui ne contiendra pas le facteur α ; on aura $A = \alpha^m Q$. Or, α^n

divise D; α^n divise donc A; α^n divise donc $\alpha^m Q$; n ne peut donc pas surpasser m. Ce qui démontre la propriété énoncée.

18. Le *plus grand commun diviseur* de plusieurs quantités entières, A, B, C,.., monomes ou polynomes, est celui de tous les diviseurs communs à ces quantités, dont le *degré* est le plus élevé et dont les coefficiens numériques sont les plus grands. Ce plus grand commun diviseur est généralement de la forme ND; N désignant un nombre entier, et D désignant une quantité littérale entière qui n'est divisible par aucun nombre entier. Si les facteurs premiers de N sont d, d', d''.., les quantités A, B, C,..., proposées, n'admettront aucun diviseur commun d'un degré plus élevé que D; mais elles seront divisibles par les quantités du même degré, D, dD, d'D, d''D,.., dd'D, dd''D, $d'd''$D,..., $dd'd''$D,..., ND; et comme le plus grand de tous ces diviseurs communs du degré le plus élevé, est ND, on dit par cette raison que ND est le *plus grand commun diviseur* des quantités A, B, C...

19. Il est facile de déduire des propriétés du n° 17 (3°, 8° et 10°), que *le plus grand commun diviseur de plusieurs quantités entières, numériques ou littérales, est le produit de tous les facteurs premiers communs à ces quantités, chacun de ces facteurs communs étant affecté du plus petit de ses exposans dans les quantités données.* En effet, il résulte du principe du n° 17 (10°), que tout diviseur D commun à des quantités entières A, B, C,..., ne peut contenir que des facteurs premiers, $\alpha, \zeta, \gamma, \ldots$, communs à A, B, C,..., et que ces facteurs ne sauraient entrer dans D, avec des exposans plus élevés que dans A, B, C,...; par conséquent, si les plus petits exposans de α, ζ, γ,.., dans A, B, C,.., sont m, n, p,.. , le diviseur commun D ne saurait être *plus grand* que $\alpha^m \zeta^n \gamma^p$...; d'ailleurs chacune des quantités A, B, C,..., étant divisible par toutes les puissances $\alpha^m, \zeta^n, \gamma^p, \ldots$, les quantités A, B, C,.., sont nécessairement divisibles par le produit $\alpha^m \zeta^n \gamma^p$... (n° 17, 8°), et ces quantités ne sont décomposables que d'une seule manière en facteurs premiers (n° 17, 3°). Le plus grand de tous les di-

viseurs communs à A, B, C, ..., est donc $\alpha^m \mathcal{C}^n \gamma^p \ldots$; ce qui démontre le principe énoncé.

Quand nous parlerons désormais du produit des facteurs communs à plusieurs quantités entières, nous sous-entendrons toujours que ces facteurs sont premiers et qu'ils sont affectés de leurs plus petits exposans dans ces quantités.

20. *Lorsqu'on divise des quantités par leur plus grand commun diviseur, les quotiens n'admettent aucun facteur commun.* En effet, si en divisant des quantités entières A, B, C, ..., par leur plus grand commun diviseur D, les quotiens A′, B′, C′, ..., pouvaient admettre un facteur commun δ, la division des quantités A′, B′, C′, ..., par δ, fournirait des quotiens exacts A″, B″, C″, ..., qui seraient entiers; on aurait,

$$A' = \delta A'', B' = \delta B'', C' = \delta C'' \ldots \quad \text{Or, } A = DA', B = DB', C = DC', \ldots$$

$$\text{Donc, } \quad A = D\delta A'', B = D\delta B'', C = D\delta C'', \ldots.$$

Les quantités A, B, C, ..., admettraient donc un commun diviseur $D\delta$ plus grand que leur plus grand commun diviseur D; ce qui est absurde.

21. *Lorsqu'on sait trouver le plus grand commun diviseur γ de deux quantités entières α, $\mathcal{C}$, il est facile de déterminer la plus petite quantité δ par laquelle on doit multiplier α pour que le produit $\alpha\delta$ soit divisible par $\mathcal{C}$.* En effet, la division de α et $\mathcal{C}$ par γ donnera des quotiens α', $\mathcal{C}'$, qui seront premiers entre eux (n° 20), et l'on aura $\alpha = \gamma\alpha'$, $\mathcal{C} = \gamma\mathcal{C}'$. Si l'on désigne par M une quantité entière telle que αM soit divisible par $\mathcal{C}$, on aura $\frac{\alpha M}{\mathcal{C}} = \frac{\gamma\alpha' M}{\gamma\mathcal{C}'} = \frac{\alpha' M}{\mathcal{C}'}$; de sorte que $\mathcal{C}'$ devra diviser α'M; or $\mathcal{C}'$ est premier avec α'; il faut donc que $\mathcal{C}'$ divise M (n° 17, 4°).

La plus petite valeur, δ, du multiplicateur M *demandé, est donc le quotient $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ par le plus grand commun diviseur γ de α et $\mathcal{C}$.*

1re. Remarque. *Le multiplicateur $\mathcal{C}'$ exprime le produit des facteurs de $\mathcal{C}$ qui n'entrent pas dans α.*

2° Remarque. *Le quotient de $\alpha\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}$ est égal au quotient α' de α par γ*; car en faisant $M=\mathcal{C}'$, les relations

$$\frac{\alpha M}{\mathcal{C}}=\frac{\alpha' M}{\mathcal{C}'},\quad \alpha=\gamma\alpha',\quad \text{donnent}\quad \frac{\alpha\mathcal{C}'}{\mathcal{C}}=\alpha'=\frac{\alpha}{\gamma}.$$

3° Remarque. Quand α et $\mathcal{C}$ sont premiers entre eux, δ est égal à $\mathcal{C}$; car $\mathcal{C}$ devant diviser αM, et $\mathcal{C}$ étant premier avec α, il faut que $\mathcal{C}$ divise M (n° 17, 4°): la plus petite valeur δ de M est donc $\mathcal{C}$.

Ainsi: *Pour trouver la plus petite quantité par laquelle il faut multiplier une quantité α, pour que le produit soit divisible par une quantité donnée $\mathcal{C}$, il suffit de chercher le plus grand commun diviseur γ de α et $\mathcal{C}$; le quotient de $\mathcal{C}$ par γ exprime le multiplicateur $\mathcal{C}'$ demandé. Ce multiplicateur $\mathcal{C}'$ exprime le produit des facteurs de $\mathcal{C}$ qui n'entrent pas dans α; et le quotient de $\alpha\mathcal{C}'$ par $\mathcal{C}$ peut s'obtenir en divisant α par γ.*

Par exemple, soient, $\alpha=a^5b^4d^3$, $\mathcal{C}=a^3b^7dn$

On aura, $\gamma=a^3b^4d$, $\frac{\mathcal{C}}{\gamma}=b^3n=\mathcal{C}'$, $\frac{\alpha\mathcal{C}'}{\mathcal{C}}=\alpha'=\frac{\alpha}{\gamma}=a^2d^2$.

22. *Lorsqu'on sait trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités, il est facile de déterminer la plus petite quantité divisible par des quantités données,* A, B, C...

En effet; la plus petite quantité divisible par A étant A, on obtiendra la plus petite quantité divisible par A et par B, en cherchant la plus petite quantité δ par laquelle il faut multiplier A pour que le produit $A\delta$ soit divisible par B. On vient de voir (n° 21) que δ est égal au quotient $\mathcal{C}'$ de B par le plus grand commun diviseur γ de A et B. La plus petite quantité divisible par A et par B est donc $A\mathcal{C}'$.

Pour obtenir la plus petite quantité divisible par A, B, C, il suffit de chercher la plus petite quantité δ', par laquelle il faut multiplier $A\mathcal{C}'$ pour que le produit $A\mathcal{C}'\delta'$ soit divisible par C. On a vu (n° 21) que δ' est égal au quotient $\mathcal{C}''$ de C par le plus grand commun diviseur γ' de $A\mathcal{C}'$ et C; de sorte que

la plus petite quantité divisible par A, par B et par G est $AG'G''$; et ainsi de suite.

23. Lorsque les facteurs premiers de plusieurs quantités sont en évidence (ce qui a toujours lieu pour des monomes), le principe du n° 19 sert à déterminer le plus grand commun diviseur de ces quantités.

Ainsi, le plus grand commun diviseur des monomes $a^5b^3c^2$, $a^6b^4d^2$, $a^2b^4c^3d$, est a^2b^3, et le plus grand commun diviseur entre $(x-1)^2(x+3)(x+1)^4$ et $(x+3)(x+1)^2(x-3)$ est $(x+3)(x+1)^2$.

24. *Le plus grand commun diviseur de différens monomes s'obtient en multipliant le plus grand commun diviseur des coefficiens numériques des monomes, par le plus grand commun diviseur littéral de ces monomes.* On a vu dans l'Arithmétique comment on détermine le plus grand commun diviseur des coefficiens numériques; et le plus grand commun diviseur littéral des monomes est toujours en évidence.

Ainsi, pour déterminer le plus grand commun diviseur des monomes $48a^3b^3c^2$, $18a^6b^4d^2$, $15a^2b^4c^3d$, on cherche d'abord le plus grand commun diviseur des coefficiens 48, 18, 15, qui est 3; et comme le plus grand commun diviseur des monomes algébriques $a^3b^3c^2$, $a^6b^4d^2$, $a^2b^4c^3d$, est a^2b^3, on voit que le plus grand commun diviseur demandé est $3a^2b^3$.

25. Le plus grand commun diviseur des différens monomes qui composent un polynome, est ce qu'on nomme le *plus grand commun diviseur monome* de ce polynome. Par exemple, le plus grand commun diviseur monome de $48a^3b^3c^2 - 18a^6b^4d^2 + 15a^2b^4c^3d$ est $3a^2b^3$; de sorte qu'en divisant ce polynome par $3a^2b^3$, le quotient $16ac^2 - 6a^4bd^2 + 5bc^3d$ n'admet aucun diviseur monome.

26. Pour *déterminer le plus grand commun diviseur monome* M *de différens polynomes* P', P'', P''', ..., on cherche les plus grands communs diviseurs monomes M', M'', M''', ..., de ces polynomes; le plus grand commun diviseur de M', M'', M''', ..., est le plus grand commun diviseur monome M demandé.

27. La *recherche du plus grand commun diviseur entre des polynomes*, repose sur les principes suivans :

1°. *Le plus grand commun diviseur de deux quantités ne change pas, lorsqu'on multiplie ou qu'on divise l'une d'elles par une quantité qui n'a aucun facteur commun avec l'autre.* Car tous les facteurs premiers communs restent les mêmes, et le plus grand commun diviseur est le produit de tous ces facteurs (n°. 19).

Par conséquent, lorsque P est premier avec B, le plus grand commun diviseur de A et B est le même que celui de AP et B.

Par exemple, mn étant premier avec $a^4b^4c^3d$, le plus grand commun diviseur de a^3b^2c et $a^2b^4c^3d$ est le même que celui de a^3b^2cmn et $a^4b^4c^3d$; ce commun diviseur est a^3b^2c.

2°. *Quand on aperçoit un facteur commun à plusieurs quantités, on peut simplifier la recherche de leur plus grand commun diviseur.* En effet, soient $A=A'D$, $B=B'D$, $C=C'D$...

Le plus grand diviseur commun aux quantités A, B, C,..., étant le produit de tous leurs facteurs communs (n° 19), on obtiendra ce plus grand commun diviseur en multipliant le facteur commun D, par le plus grand commun diviseur des quantités A', B', C'....

3°. *Lorsqu'on sait trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités, il est facile d'en déduire celui d'un nombre quelconque de quantités* A, B, C, D,.... On détermine successivement, le plus grand commun diviseur δ' de A et B, le plus grand commun diviseur δ'' de δ' et C, le plus grand commun diviseur δ''' de δ'' et D; et ainsi de suite; le dernier de ces plus grands communs diviseurs est celui des quantités données A, B, C, D,... En effet; le plus grand diviseur commun à des quantités étant le produit de tous leurs facteurs communs, δ' est le produit des facteurs communs à A et B, et δ'' est le produit des facteurs communs à δ' et C; δ'' est donc le produit de tous les facteurs communs à A, B, C; δ'' est donc le plus grand commun diviseur des trois quantités A, B, C. Mais, δ''' est le produit des facteurs communs à δ'' et D; δ''' est donc le

produit de tous les facteurs communs à A, B, C, D; δ'' est donc le plus grand commun diviseur des quatre quantités A, B, C, D. Et ainsi de suite.

4°. *Lorsqu'un polynome* $A+Bx+Cx^2+$ etc., *est divisible par une quantité* δ *indépendante de la lettre* x *par rapport à laquelle il est ordonné, chacun des coefficiens* A, B, C, etc., *est nécessairement divisible par* δ. En effet; les quantités δ, A, B, C, etc., étant indépendantes de x, il n'y a qu'un quotient de la forme $\alpha+\mathcal{C}x+\gamma x^2+$ etc., qui multiplié par le diviseur δ, puisse reproduire le dividende $A+Bx+Cx^2+$ etc.; on a donc

$$A+Bx+Cx^2+\text{etc.}=(\alpha+\mathcal{C}x+\gamma x^2+\text{etc.})\,\delta=\alpha\delta+\mathcal{C}\delta x+\gamma\delta x^2+\text{etc.}$$

Les polynomes $A+Bx+Cx^2+$ etc., $\alpha\delta+\mathcal{C}\delta x+\gamma\delta x^2+$ etc., devant être identiques, il faut que $A=\alpha\delta$, $B=\mathcal{C}\delta$, $C=\gamma\delta$, etc.; ce qui démontre le principe énoncé.

Remarque. Pour *trouver le quotient de la division du polynome* $A+Bx+Cx^2+$ etc., *par le diviseur* δ *indépendant de* x, il faut diviser chacun des coefficiens A, B, C, etc., par δ; les quotiens α, $\mathcal{C}$, γ, etc., sont les coefficiens des puissances correspondantes de x dans le quotient demandé; de sorte que ce quotient est $\alpha+\mathcal{C}x+\gamma x^2+$ etc.

Par exemple, pour obtenir le quotient de la division de $(a^2+a-2)-(a^3-1)x+(a^2-1)x^2$ par $a-1$, on divise les coefficiens a^2+a-2, a^3-1, a^2-1, par $a-1$, ce qui donne les quotiens $a+2$, a^2+a+1, $a+1$; le quotient demandé est donc $(a+2)-(a^2+a+1)x+(a+1)x^2$.

28. *Pour simplifier la recherche du plus grand commun diviseur entre des polynomes* P′, P″, P‴,..., on peut d'abord diviser ces polynomes par leurs plus grands communs diviseurs monomes respectifs, M′, M″, M‴,...; les quotiens A, B, C,..., n'admettent aucun commun diviseur monome (n° 20), et le plus grand commun diviseur des polynomes P′, P″, P‴,..., est égal au produit du plus grand commun diviseur M des monomes M′, M″, M‴,..., par le plus grand commun diviseur D

des polynomes A, B, C,... En effet; si l'on divise M', M'', M''',..., par M, les quotiens m', m'', m''',..., n'admettront aucun facteur commun (n° 20); on aura

$$M' = Mm', \quad M'' = Mm'', \quad M''' = Mm''', \ldots,$$
$$P' = M'A = Mm'A, \quad P'' = Mm''B, \quad P''' = Mm'''C, \ldots$$

Le plus grand commun diviseur des polynomes P', P'', P''',..., sera donc égal au produit de leur plus grand commun diviseur monome M, par le plus grand commun diviseur des polynomes m'A, m''B, m'''C,... (n° 27, 2°); et les monomes m', m'', m''',..., n'admettant aucun facteur commun, le plus grand commun diviseur de m'A, m''B, m'''C,..., est le même que celui des polynomes A, B, C..., (n° 19).

La recherche du plus grand commun diviseur des polynomes P', P'', P''',..., se trouve ainsi réduite à calculer le plus grand commun diviseur D des polynomes entiers A, B, C,..., qui n'admettent aucun diviseur monome. Et par suite, un monome quelconque sera premier avec chacun des polynomes A, B, C...

29. Pour *calculer le plus grand commun diviseur des deux polynomes entiers* A, B, on observe que si l'un de ces polynomes divisait l'autre, il serait le plus grand commun diviseur cherché. On est donc conduit à diviser ces polynomes l'un par l'autre; à cet effet, on les ordonne suivant les puissances décroissantes d'une même lettre x; ils prennent la forme

$$A = Px^m + Qx^{m-1} + \text{etc.}, \quad B = px^n + qx^{n-1} + \text{etc.}$$

Les coefficiens P, Q,..., p, q,..., sont indépendans de x; et en supposant $n = m$ ou $n < m$, on divise A par B.

30. Pour graduer les difficultés, *nous supposerons d'abord, que dans toutes les divisions successives auxquelles conduira la recherche du plus grand commun diviseur, le coefficient du premier terme de chaque dividende partiel est divisible par le coefficient du premier terme du diviseur; de sorte que les quotiens et les restes seront des polynomes entiers.*

Lorsque B divise A, le plus grand commun diviseur demandé est B.

Quand B ne divise pas A, on obtient un quotient entier Q', et un reste R' dans lequel le plus fort exposant n' de x est moindre que n; on a

$$A = BQ' + R', \quad \text{d'où} \quad R' = A - BQ'.$$

Les polynomes A, B, Q', R', étant entiers, la 2e égalité fait voir que tout diviseur commun à A et B divise R', et la 1re égalité prouve que tout diviseur commun à B et R' divise A; les facteurs communs à A et B, sont donc les mêmes que ceux de B et R'; le produit de tous les facteurs communs à A et B est donc le même que celui de tous les facteurs communs à B et R'; le plus grand commun diviseur de A et B est donc le même que celui de B et R' (n° 19).

Par conséquent: *Tout diviseur commun à deux polynomes* A, B, *divise le reste* R' *de la division de* A *par* B, *et le plus grand commun diviseur des polynomes* A, B, *est le même que celui de* B *et* R'.

La question se trouve ainsi réduite à calculer le plus grand commun diviseur des deux polynomes B, R', dans lesquels les plus forts exposans de x sont respectivement moindres que dans A et B. On divise B par R'.

Quand cette division conduit à un reste nul, R' est le plus grand commun diviseur de B et R', et par suite de A et B.

Lorsque B n'est pas divisible par R', on obtient un quotient entier Q'' et un reste R'', dans lequel le plus fort exposant n'' de x est moindre que n'. Or, d'après le principe qui vient d'être démontré: tout diviseur de A et B divise R', tout diviseur de B et R' divise R'', le plus grand commun diviseur de A et B est le même que celui de B et R', et ce dernier est le même que celui de R' et R''. Par conséquent: tout diviseur de A et B divise les restes R', R'', et le plus grand commun diviseur des polynomes A, B, est le même que celui des restes R', R''.

Si l'on continue à diviser les restes successifs les uns par les

autres, on verra que *tout diviseur commun aux polynomes* A, B, *divise les restes successifs* R′, R″, etc., *et que le plus grand commun diviseur des polynomes* A, B, *est le même que celui de deux restes consécutifs quelconques.*

Mais, les plus forts exposans, n', n'',..., de x vont en diminuant dans les restes successifs R′, R″,...; ces exposans sont des nombres entiers positifs, et n' est moindre que n. *On parviendra donc toujours à un reste* R *indépendant de* x, *après avoir effectué* n *divisions au plus.*

Quand le reste R *sera nul, le reste* r *qui précède* R *sera le plus grand commun diviseur de* A *et* B.

Lorsque le reste R *ne sera pas nul, le plus grand commun diviseur des polynomes* A, B, *sera nécessairement indépendant de* x; car ce plus grand commun diviseur est le même que celui des restes r, R, et R ne contenant pas x, tout diviseur commun à r et R est nécessairement indépendant de x. Le plus grand commun diviseur de A et B étant indépendant de x, devra diviser exactement les coefficiens des diverses puissances de x dans A et B (n° 27, 4°). La question sera donc ramenée à déterminer le plus grand commun diviseur entre ces coefficiens; et la difficulté est diminuée, puisque ces coefficiens renferment une lettre de moins que les polynomes proposés.

31. *Lorsque dans le cours des divisions qui conduisent au reste indépendant de* x, *on trouve un dividende partiel* N *dont le coefficient* a *du* 1er *terme n'est pas divisible par le coefficient* C *du* 1er *terme du diviseur* N′, *si* N′ *n'admet aucun diviseur indépendant de la lettre* x *par rapport à laquelle les polynomes sont ordonnés, le principe du* n° 27 (1°) *fournit le moyen d'éviter les quotiens fractionnaires, sans altérer le plus grand commun diviseur, en multipliant le dividende* N *par* C. En effet, C ne contient pas x, et l'on suppose que N′ n'admet aucun diviseur indépendant de x; il suit de là que C est premier avec N′, car autrement, C et N′ admettraient un diviseur commun ♪ qui serait indépendant de x, puisque C ne contient pas x; N′ admettrait donc un diviseur

indépendant de x ; ce qui est contre l'hypothèse. Le plus grand commun diviseur entre N et N′ est donc le même que celui qui existe entre N$\mathcal{C}$ et N′ (n° 27, 1°) ; on pourra donc rendre la division possible, sans altérer le plus grand commun diviseur, en multipliant le dividende N par le coefficient $\mathcal{C}$ du 1er terme du diviseur.

Remarque. Lorsqu'on sait trouver le plus grand commun diviseur γ des coefficiens α, $\mathcal{C}$ (*), on peut simplifier le calcul, en cherchant la plus petite quantité $\mathcal{C}'$ par laquelle il faut multiplier le dividende N, pour que le coefficient $\alpha\mathcal{C}'$ du 1er terme de N$\mathcal{C}'$ soit divisible par $\mathcal{C}$. On a vu (n° 21), que $\mathcal{C}'$ est le quotient de la division de $\mathcal{C}$ par γ. Le multiplicateur $\mathcal{C}'$ étant indépendant de x, on prouvera comme ci-dessus que le plus grand commun diviseur de N et N′ est le même que celui de N$\mathcal{C}'$ et N′.

Enfin, si dans toutes les divisions qui ont précédé celle de N par N′, le 1er terme de chaque diviseur a divisé exactement le 1er terme de chaque dividende partiel, le plus grand commun diviseur de A et B sera le même que celui des deux restes consécutifs N, N′, (n° 30) ; et ce dernier plus grand commun diviseur est le même que celui de N$\mathcal{C}'$ et N′.

32. Nous allons faire voir qu'*on peut toujours préparer les calculs de manière que les diviseurs successifs ne renferment aucun diviseur indépendant de la lettre x par rapport à laquelle les polynomes sont ordonnés.*

Soit proposé de trouver le plus grand commun diviseur de deux polynomes A, B, qui contiennent γ lettres, et supposons qu'on sache trouver le plus grand commun diviseur de polynomes ne contenant que $\gamma-1$ lettres. On ordonne les polynomes A, B, suivant les puissances décroissantes d'une même lettre x ; ils prennent la forme

$$A=Px^m+Qx^{m-1}+\ldots+Sx+T,\quad B=px^n+qx^{n-1}+\ldots+sx+t.$$

(*) Ces coefficiens étant indépendans de x, contiennent une lettre de moins que les polynomes dont on cherche le plus grand commun diviseur.

Les coefficiens de x contenant au plus $\gamma-1$ lettres, on saura calculer le plus grand commun diviseur δ' de P, Q, ..., S, T, et le plus grand commun diviseur δ'' de p, q, ..., s, t. Le plus grand commun diviseur δ de δ' et δ'' sera le *plus grand commun diviseur indépendant de* x des polynomes A, B; de sorte qu'en divisant A par δ' et B par δ'' (n° 27, 4°), les quotiens A', B', n'admettront aucun diviseur indépendant de x. On aura,

$$A=\delta' A', \quad B=\delta'' B', \quad A'=P'x^m+Q'x^{m-1}+\ldots+S'x+T',$$
$$B'=p'x^n+q'x^{n-1}+\ldots+s'x+t'.$$

Pour mettre le commun diviseur δ en évidence dans A et B, on divise δ' et δ'' par δ, les quotiens a', b', sont premiers entre eux, et l'on a

$$\delta'=\delta a', \quad \delta''=\delta b'; \quad \text{d'où} \quad A=\delta a' A', \quad B=\delta b' B'.$$

Or, a' est premier avec b'; et comme B' n'admet aucun diviseur indépendant de x, la quantité a' (indépendante de x) est première avec B'; a' est donc premier avec b'B' (n° 17, 5°); le plus grand commun diviseur de a'A' et b'B', est donc le même que celui de A' et b'B' (n° 27, 1°); ce dernier est le même que celui de A' et B', car b' est premier avec A'. Le plus grand commun diviseur de a'A' et b'B' étant le même que celui de A' et B', il résulte du principe du n° 27 (2°), que *le plus grand commun diviseur de* $\delta a'$A' *et* $\delta b'$B', *ou de* A *et* B, *sera le produit de* δ *par le plus grand commun diviseur* D' *de* A' *et* B'.

La question se réduit donc à calculer le plus grand commun diviseur D' des deux polynomes A', B', qui n'admettent aucun diviseur indépendant de x.

Pour calculer le *plus grand commun diviseur* D' *dépendant de* x, on divisera A' par B' (on suppose $m>n$ ou $m=n$); dans tout le cours de cette division, le diviseur n'admettant aucun facteur indépendant de x, lorsque le 1er terme d'un dividende partiel ne sera pas divisible par le coefficient du 1er

terme du diviseur, il sera facile de rendre la division possible en multipliant ce dividende par une quantité indépendante de x, (n° 31). On n'obtiendra de cette manière que des termes entiers au quotient, et l'on parviendra à un reste R′ dans lequel le plus fort exposant n' de x sera moindre que le plus fort exposant n de x dans le diviseur B′. Le plus grand commun diviseur de A′ et B′ sera le même que celui de B′ et R′.

Pour ramener la question à la recherche du plus grand commun diviseur entre deux quantités qui, comme A′ et B′, n'admettent aucun facteur indépendant de x, on observe que B′ n'admettant aucun facteur indépendant de x, toute quantité indépendante de x sera première avec B′; on pourra donc supprimer tous les facteurs indépendans de x qui peuvent entrer dans le reste R′ (n° 27, 1°). Ainsi, on déterminera le plus grand commun diviseur θ' des coefficiens de x dans R′, et on divisera R′ par θ'; le quotient R_1 n'admettra aucun facteur indépendant de x, on aura $R' = \theta' R_1$, et comme θ' est premier avec B′, le plus grand commun diviseur de B′ et R′ ou de B′ et $\theta' R_1$, sera le même que celui de B′ et R_1. On est donc conduit à diviser B′ par R_1; et comme le diviseur ne renferme pas de facteur indépendant de x, on pourra éviter les quotiens fractionnaires en multipliant par des quantités indépendantes de x (n° 31); ce qui conduira à un reste R″ dans lequel le plus fort exposant n'' de x sera moindre que n'. Le plus grand commun diviseur cherché sera le même que celui de R_1 et R″. On cherchera le plus grand commun diviseur θ'' des coefficiens de x dans R″; la division de R″ par θ'' donnera un quotient R_2 qui n'admettra aucun diviseur indépendant de x, et le plus grand commun diviseur demandé sera le même que celui des polynomes R_1, R_2. En continuant à opérer de cette manière, on n'obtiendra que des termes entiers dans les quotiens et dans les restes; et l'on parviendra à un reste R indépendant de x, après un nombre de divisions qui ne pourra surpasser le plus fort exposant n de x dans le 1er diviseur B, car les plus forts exposans n', n'', ..., de x dans les restes successifs R′, R″, ..., sont des nombres entiers

positifs qui vont en diminuant. *Le plus grand commun diviseur des polynomes* A′, B′, *sera le même que celui de deux restes consécutifs quelconques.*

Lorsque R sera nul, le reste r qui précède R, sera le plus grand commun diviseur D′ de A′ et B′.

Quand R ne sera pas nul, les polynomes A′, B′, seront premiers entre eux; car ils n'admettent aucun diviseur indépendant de x, et ils ne sauraient admettre un commun diviseur fonction de x, puisque leur plus grand commun diviseur est le même que celui des restes r, R; dans ce cas, D′ est égal à l'unité.

Remarque. Lorsque les polynomes A′, B′, dont on cherche le plus grand commun diviseur, n'admettent aucun facteur monome, on peut simplifier les calculs, en supprimant le plus grand diviseur monome commun aux termes de chaque reste. En effet, si M′ désigne le plus grand commun diviseur monome du reste R′ de la division de A′ par B′, le quotient de R′ par M′ sera un polynome entier r' qui n'admettra aucun diviseur monome, on aura $R' = M'r'$; et comme M′ est premier avec B′, le plus grand commun diviseur des polynomes B′, M′r', sera le même que celui de B′ et r', (n° 27, 1°). Par une raison semblable, si R″ désigne le reste de la division de B′ par r', on pourra supprimer le plus grand commun diviseur monome de R″; et ainsi de suite.

Cela posé : on a vu dans l'arithmétique comment on trouve le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres entiers; ce procédé combiné avec celui qui vient d'être exposé, fournira le moyen de déterminer le plus grand commun diviseur de deux polynomes contenant une seule lettre; et le principe du n° 27 (3°) servira à calculer le plus grand commun diviseur des polynomes qui ne contiennent qu'une seule lettre. On en déduira le plus grand commun diviseur des polynomes qui contiennent deux lettres; et ainsi de suite, quel que soit le nombre des lettres contenues dans les polynomes proposés. *On est donc en état de trouver le plus grand commun diviseur de plusieurs polynomes entiers, quel que soit le nombre des lettres contenues dans ces polynomes.*

33. D'après ce qui précède, pour *déterminer le plus grand commun diviseur de deux polynomes entiers* P', P'', *contenant un nombre quelconque de lettres* $x, y, z, \ldots$, on cherche d'abord leur plus grand commun diviseur monome M, par la méthode du n° 26, et l'on trouve

$$P' = Mm'A, \quad P'' = Mm''B \text{ (page 30).}$$

On a vu (n° 28), qu'on obtiendra le plus grand commun diviseur de P' et P'', en multipliant M par le plus grand commun diviseur D des polynomes A, B, qui n'admettent aucun diviseur monome.

Pour calculer D, on ordonne A et B suivant les puissances décroissantes d'une même lettre x, ce qui donne

$$A = Px^m + Qx^{m-1} + \ldots + Sx + T, \quad B = px^n + qx^{n-1} + \ldots + sx + t.$$

Soit $m > n$ ou $m = n$.

1°. *Lorsque* A *et* B *ne contiennent qu'une seule lettre* x, les coefficiens $P, Q, \ldots, S, T, p, q, \ldots, s, t$, sont des nombres entiers; et les polynomes A, B, n'admettent aucun diviseur indépendant de x, car ce diviseur, s'il existait, serait un nombre entier, ce qui est impossible puisque A et B n'admettent aucun diviseur monome.

Le polynome B n'admettant aucun diviseur indépendant de x, ni aucun diviseur monome, il résulte des propriétés du n° 32 que dans tout le cours de la division de A par B, lorsque le coefficient α du 1er terme d'un dividende partiel N ne sera pas divisible par le coefficient ζ du 1er terme du diviseur B, on pourra rendre la division possible, sans altérer le plus grand commun diviseur, en multipliant N par ζ, ou ce qui est plus simple, en multipliant N par le produit ζ' des facteurs de ζ qui n'entrent pas dans α (*), et l'on pourra supprimer le plus grand diviseur monome commun aux termes de chaque

(*) Pour trouver le multiplicateur ζ', on cherche le plus grand commun diviseur γ des nombres entiers α, ζ, et l'on divise ζ par γ; le quotient exprime le multiplicateur demandé (n° 21).

reste (n° 32). On parviendra de cette manière à un reste R^{r} dans lequel le plus fort exposant de x sera moindre que n. On divisera le reste R' par son plus grand commun diviseur monome; ce qui donnera un quotient R_1; le plus grand commun diviseur de A et B sera le même que celui de B et R_1. On est ainsi conduit à diviser B par R_1. Or, R_1 n'admet aucun diviseur monome; R_1 n'admet donc aucun diviseur indépendant de x. Par conséquent, dans tout le cours de la division de B par R_1, lorsque le coefficient a' du 1er terme d'un dividende partiel ne sera pas divisible par le coefficient a' du 1er terme de R_1, on pourra rendre la division possible en multipliant ce dividende par les facteurs de a' qui n'entrent pas dans a' (n° 21), et l'on pourra supprimer le plus grand diviseur monome commun aux termes de chaque reste. On parviendra de cette manière à un reste R'' d'un degré moindre (par rapport à x) que le diviseur R'. On divisera le reste R'' par son plus grand commun diviseur monome, le quotient R_2 n'admettra aucun diviseur monome, ni aucun diviseur indépendant de x; le plus grand commun diviseur de A et B sera le même que celui de R_1 et R_2. En continuant ces calculs, on n'obtiendra que des termes entiers dans les quotiens et dans les restes, et l'on parviendra à un reste R indépendant de x. Lorsque R sera nul, le reste précédent sera le plus grand commun diviseur D de A et B. Lorsque R ne sera pas nul, les polynomes A, B, seront premiers entre eux (page 36); de sorte que D sera égal à l'unité. Le plus grand commun diviseur des polynomes P', P'', sera MD.

1er Exemple. $P' = 6x^{12} + 6x^{11} - 42x^{10} - 6x^{9} + 36x^{8}$,

$P'' = 14x^{7} - 70x^{5} + 56x^{3}$.

Le plus grand commun diviseur monome de P' est $M' = 6x^{8}$, et celui de P'' est $M'' = 14x^{3}$. Le plus grand commun diviseur de M' et M'' est $M = 2x^{3}$. On divise P' par M' et P'' par M'', ce qui donne les quotiens

$$A = x^{4} + x^{3} - 7x^{2} - x + 6, \quad B = x^{4} - 5x^{2} + 4.$$

Pour trouver le plus grand commun diviseur D de A et B,

on divise A par B, ce qui fournit le quotient $+1$ et le reste $R' = x^3 - 2x^2 - x + 2$, qui n'admet aucun diviseur monome. La division de B par R', donnant le quotient exact $x + 2$, le reste R' est le plus grand commun diviseur D de A et B.

Le plus grand commun diviseur de P' et P'' est

$$MD = 2x^3(x^3 - 2x^2 - x + 2).$$

Et en effet, si l'on divise les polynomes P', P'', par MD, les quotiens $3(x+3)x^5$, $7(x+2)$, seront premiers entre eux.

2e Exemple. $P' = 24x^{12} - 60x^{11} + 6x^{10} - 6x^8$,

$P'' = 84x^6 - 154x^5 - 112x^4 - 14x^3$.

On trouve, $M' = 6x^8$, $M'' = 14x^3$, $M = 2x^3$.

On divise P' par M' et P'' par M'', ce qui donne les quotiens,

$$A = 4x^4 - 10x^3 + x^2 - 1, \quad B = 6x^3 - 11x^2 - 8x - 1.$$

Pour déterminer le plus grand commun diviseur D de A et B, on observe que dans la division de A par B, le diviseur B ne contenant aucun facteur indépendant de x, on n'altère pas le plus grand commun diviseur en multipliant le dividende A par un nombre quelconque, car ce nombre est premier avec B. Ainsi, pour *éviter les fractions*, on pourrait multiplier A par le coefficient 6 du 1er terme du diviseur ; mais on déduit du principe du n° 21, qu'il suffit de multiplier A par 3 ; le plus grand commun diviseur de A et B étant le même que celui de 3A et B, on divise 3A par B, ce qui donne le quotient

$2x$ et le reste $r = -8x^3 + 19x^2 + 2x - 3$,

qui n'admet aucun diviseur monome.

Le plus grand commun diviseur demandé étant le même que celui de B et r, on est conduit à diviser r par B ; on rend la division possible, sans changer le plus grand commun diviseur cherché, en multipliant r par 3 ; la division de $3r$ par B donne le quotient -4 et le reste $R' = 13(x^2 - 2x - 1)$.

Le plus grand commun diviseur demandé est le même que celui de B et R′ ; et comme R′ renferme le facteur 13 qui est premier avec B, on peut supprimer ce facteur dans R′, sans changer le plus grand commun diviseur ; ce qui donne le quotient $R_1 = x^2 - 2x - 1$.

La question se trouve ainsi réduite à chercher le plus grand commun diviseur entre B et R_1 ; on divise B par R_1 ; cette division se fait sans qu'il soit nécessaire d'introduire des facteurs dans les dividendes partiels ; on parvient à un reste nul, et l'on en conclut que R_1 est le plus grand commun diviseur entre A et B. Le plus grand commun diviseur entre P′ et P″ est $MR_1 = 2x^3(x^2 - 2x - 1)$.

On trouvera de cette manière le plus grand commun diviseur de deux polynomes contenant une seule lettre ; et le principe du n° 27 (3°), fournira le moyen d'en déduire le *plus grand commun diviseur d'un nombre quelconque de polynomes contenant une seule lettre.*

Exemple. Soient, $P' = 12x^5 - 18x^3 + 6x^2$,

$P'' = 36x^6 - 12x^5 - 24x^4$, $P''' = 75x^7 - 30x^6 - 45x^5$.

Pour déterminer le plus grand commun diviseur de ces polynomes, on cherche d'abord leurs plus grands communs diviseurs monomes M′, M″, M‴ ; et l'on trouve $M' = 6x^2$, $M'' = 12x^4$, $M''' = 15x^5$. Le plus grand commun diviseur $3x^2$ de M′, M″, M‴, est le plus grand commun diviseur monome M des polynomes proposés.

On divise P′, P″ et P‴, par leurs plus grands communs diviseurs monomes M′, M″, M‴ ; ce qui donne les quotiens

$A = 2x^3 - 3x + 1$, $B = 3x^2 - x - 2$, $C = 5x^2 - 2x - 3$.

Pour calculer le plus grand commun diviseur des polynomes A, B, C, on cherche le plus grand commun diviseur de A et B qui est $x - 1$, et le plus grand commun diviseur de $x - 1$ et C, qui est $x - 1$. Le plus grand commun diviseur des polynomes A, B, C, est $D = x - 1$, (n° 27, 3°). Le plus grand

commun diviseur des polynomes P′, P″, P‴, est

$$MD=3x^3(x-1).$$

2°. *Lorsque les polynomes* A, B, *contiennent deux lettres* x, y, les coefficiens de x dans A et B, ne renferment qu'une seule lettre y. On peut donc trouver, par la méthode indiquée (1°), le plus grand commun diviseur δ' des coefficiens P, Q,..., S, T, de x dans A, et le plus grand commun diviseur δ'' des coefficiens $p, q, \ldots, s, t$, de x dans B; le plus grand commun diviseur δ de δ' et δ'', est le *plus grand commun diviseur indépendant de* x, des polynomes A, B.

Pour trouver le *plus grand commun diviseur dépendant de* x, on divise A par δ' et B par δ'' (n° 27, 4°); les quotiens A′, B′, sont des fonctions de x et y qui n'admettent aucun diviseur indépendant de x, et qui ne sont divisibles par aucun monome. On a,

$$A=\delta'A',\ B=\delta''B',\ A'=P'x^m+..+T',\ B'=p'x^n+..+t'.$$

Dans le cours de la division de A′ par B′, le diviseur n'admettant aucun facteur indépendant de x, ni aucun facteur monome, toute quantité indépendante de x ou monome, sera première avec B′; on n'altérera donc pas le plus grand commun diviseur en multipliant ou en divisant les dividendes partiels par des quantités indépendantes de x ou par des monomes. Ainsi, lorsque le coefficient α du 1er terme d'un dividende partiel N, ne sera pas divisible par le coefficient p' du 1er terme du diviseur B′, on rendra la division possible, sans altérer le plus grand commun diviseur, en multipliant N par le produit ζ' des facteurs de p' qui n'entrent pas dans α (*); on pourra supprimer dans chaque reste son plus grand commun diviseur indépendant de x, et son plus grand commun diviseur monome. On parviendra de cette manière à un reste

(*) Les coefficiens α, p', ne pouvant renfermer qu'une seule lettre y, on calculera leur plus grand commun diviseur γ par la méthode indiquée (1°); et en divisant p' par γ, le quotient exprimera le multiplicateur ζ' demandé (n°. 21).

R′ dans lequel le plus fort exposant de x sera moindre que n. On divisera le reste R′ par son plus grand commun diviseur monome, ce qui donnera un quotient r' qui n'admettra aucun diviseur monome. Les coefficiens des diverses puissances de x dans r' ne contenant qu'une seule lettre y, on pourra déterminer le plus grand commun diviseur d' de ces coefficiens ; en divisant r' par d' (n° 27, 4°), le quotient R_1 n'admettra aucun diviseur indépendant de x, ni aucun diviseur monome. Le plus grand commun diviseur de A′ et B′ sera le même que celui de B′ et R_1. La question sera ainsi réduite à chercher le plus grand commun diviseur des deux polynomes entiers B′, R_1 ; et comme R_1 ne contient aucun diviseur indépendant de x, ni aucun diviseur monome, on pourra opérer sur B′ et R_1 comme on vient de le faire sur les polynomes A′, B′; ce qui conduira à un reste R″ ; le plus fort exposant de x dans R″ sera moindre que dans R_1. On divisera R″ par son plus grand commun diviseur monome, ce qui donnera un quotient r'' ; on déterminera le plus grand commun diviseur d'' des coefficiens de x dans r'', et la division de r'' par d'', fournira un quotient R_2 qui n'admettra aucun diviseur indépendant de x, ni aucun diviseur monome. Le plus grand commun diviseur de A′ et B′ sera le même que celui de R_1 et R_2. En continuant ces calculs, on parviendra à un reste R indépendant de x. Lorsque R sera nul, le reste précédent sera le plus grand commun diviseur D′ de A′ et B′. Quand R ne sera pas nul, les polynomes A′, B′, seront premiers entre eux. Le plus grand commun diviseur des polynomes A, B, sera $\delta D'$, et le plus grand commun diviseur des polynomes P′, P″, sera $M\delta D'$.

Exemple. Soient les deux polynomes,

$$P' = 6y^6x^8 - 6y^4x^6 + 6y^7x^4 - 6y^6x^4 - 6y^7x^3 + 6y^6x^3 - 6y^5x^3 + 6y^4x^3 - 6y^6x^2 + 6y^5x^2,$$

$$P'' = 4y^4x^6 - 4y^3x^6 - 4y^4x^5 + 4y^3x^5 - 4y^6x^4 + 4y^5x^4 + 4y^6x^3 - 4y^5x^3.$$

Pour *déterminer le plus grand commun diviseur monome* M des polynomes P′, P″, on cherche d'abord les plus grands communs diviseurs monomes M′, M″, de P′ et P″ ; on trouve

$M' = 6y^4x^2$, $M'' = 4y^3x^3$; le plus grand commun diviseur de M′ et M″ est $M = 2y^3x^2$.

Pour *déterminer le plus grand commun diviseur indépendant de* x, on divise P′ par M′ et P″ par M″ ; on ordonne les quotiens A, B, par rapport aux puissances décroissantes de x, ce qui donne,

$$A = (y^2-1)x^3+(y-1)y^2x^2-(y^3-y^2+y-1)x-(y-1)y,$$
$$B = (y-1)x^3-(y-1)x^2-(y-1)y^2x+(y-1)y^2.$$

Le plus grand commun diviseur des coefficiens de x dans A est $\delta' = y-1$, et celui des coefficiens de x dans B est $\delta'' = y-1$. Le plus grand commun diviseur indépendant de x, de A et B, est donc $\delta = y-1$.

On divise A et B par $y-1$, ce qui donne les quotiens,

$$A' = (y+1)x^3+y^2x^2-(y^2+1)x-y,$$
$$B' = x^3-x^2-y^2x+y^2.$$

Pour *trouver le plus grand commun diviseur dépendant de* x, on divise A′ par B′, ce qui donne le quotient $y+1$ et le reste

$$R' = (y^2+y+1)x^2+(y^3-1)x-(y^3+y+1)y.$$

Ce reste n'admettant pas de diviseur monome, on a $R' = r'$. On détermine le plus grand commun diviseur d' des coefficiens de x dans R′, et l'on trouve $d' = y^2+y+1$. Le quotient de R′ par d' est $R_1 = x^2+(y-1)x-y$.

Le plus grand commun diviseur de A′ et B′ étant le même que celui de B′ et R_1, on divise B′ par R_1, ce qui donne le quotient $x-y$, et le reste $R = 0$. Le plus grand commun diviseur de A′ et B′ est donc

$$D' = R_1 = x^2+(y-1)x-y = x(x+y)-(x+y) = (x-1)(x+y).$$

Le plus grand commun diviseur de P′ et P″ est

$$M\delta D' = 2y^3x^2(y-1)(x-1)(x+y).$$

On trouvera de cette manière le plus grand commun divi-

seur de deux polynomes quelconques contenant deux lettres, et le principe du n° 27 (3°), fournira le moyen d'en déduire le plus grand commun diviseur d'un nombre quelconque de polynomes de cette espèce. On en déduira le *plus grand commun diviseur de polynomes contenant trois lettres;* et ainsi de suite.

On est donc en état de *déterminer le plus grand commun diviseur d'un nombre quelconque de polynomes entiers, quel que soit d'ailleurs le nombre des lettres contenues dans ces polynomes.*

34. *Les polynomes* A′, B′, *dont on cherche le plus grand commun diviseur* D′, *ne renfermant aucun facteur indépendant de la lettre x par rapport à laquelle ils sont ordonnés, on peut calculer* D′, *sans qu'il soit nécessaire de supprimer successivement les facteurs indépendans de x contenus dans les restes successifs.* En effet; dans ce cas, lorsque pour éviter les quotiens fractionnaires, on multiplie des dividendes partiels par des quantités indépendantes de x, ces multiplications peuvent altérer le plus grand commun diviseur en introduisant dans les différens restes des facteurs indépendans de x non communs à A′ et B′; de sorte que le plus grand commun diviseur de deux restes consécutifs, n'est plus nécessairement le même que celui de A′ et B′. Or, les facteurs, non communs à A′ et B′, introduits dans les restes, par les multiplications précédentes, sont nécessairement indépendans de x, et le plus grand commun diviseur D′, de A′ et B′, ne saurait admettre aucun facteur indépendant de x. Par conséquent, lorsqu'on parviendra à un reste S qui divisera le reste précédent, on pourra déduire D′ de S, en supprimant les facteurs indépendans de x contenus dans S; à cet effet, on cherchera le plus grand commun diviseur δ entre les coefficiens des diverses puissances de x dans S; le quotient de S par δ, exprimera le plus grand commun diviseur D′ de A′ et B′.

35. Le procédé que nous avons indiqué (n° 33, 1°), pour calculer le plus grand commun diviseur entre des polynomes contenant une seule lettre, fournit le moyen de *décomposer*

un polynome P', *fonction de deux lettres*, x, y, *en trois facteurs* X', Y', A'' ; *le* 1er *facteur* X' *est une quantité indépendante de* y *qui peut être une fonction de* x, *ou un nombre, ou l'unité; le* 2e *facteur* Y' *est une quantité indépendante de* x *qui ne peut être qu'une fonction de* y, *ou l'unité. Enfin, le* 3e *facteur* A'' *est une fonction de* x *et* y *qui n'admet aucun diviseur indépendant de l'une des lettres*, x, y, *et qui peut se réduire à l'unité.*

1°. Pour *calculer le facteur* X' *indépendant de* y, on ordonne le polynome P' par rapport à y ; et comme d'après le principe du n° 27 (4°), tout facteur de P' qui ne contient pas y, doit diviser les coefficiens des diverses puissances de y dans P', on cherche le plus grand commun diviseur entre ces coefficiens ; ce qui n'offre aucune difficulté puisque ces coefficiens ne sauraient contenir que la seule lettre x combinée avec des nombres entiers ; ce plus grand commun diviseur exprime le facteur X' demandé.

2°. Pour *déterminer le facteur* Y' *indépendant de* x, on pourrait ordonner P' par rapport à x ; le plus grand commun diviseur entre les coefficiens des diverses puissances de x dans P', exprimerait le facteur demandé. Mais on parvient plus simplement au même résultat en divisant d'abord P' par X' ; ce qui donne pour quotient un polynome entier A'. On a $P' = X'A'$. Or, Y' est égal à une fonction de y, ou à l'unité ; et X' est une fonction de la seule lettre x, ou un nombre, ou l'unité ; Y' est donc premier avec X'. Mais, P' étant égal à X'A', le facteur Y' de P' doit diviser le produit X'A' ; il faut donc que Y' divise A' (n° 17 , 4°). Par conséquent, si l'on ordonne A' par rapport à x, le facteur Y', qui est indépendant de x, devra diviser les coefficiens des diverses puissances de x dans A' (n° 27 , 4°) ; on cherchera donc le plus grand commun diviseur de ces coefficiens ; il exprimera le facteur Y' demandé.

3°. Enfin, pour *calculer le* 3e *facteur* A'', fonction de x et y, on divise A' par Y', le quotient exprime le facteur cherché.

On a, $A' = Y'A''$, $P' = X'A' = X'Y'A''$.

Le polynome A'' n'admet aucun diviseur indépendant de l'une des lettres x, y, ni aucun diviseur monome.

On parviendrait au même résultat en commençant par la recherche du facteur Y'.

36. La décomposition que nous venons d'indiquer (n° 35) fournit le moyen de *simplifier les calculs relatifs à la recherche du plus grand commun diviseur de deux polynomes entiers* P', P'', *qui ne contiennent que deux lettres* x, y; à cet effet, on ordonne ces polynomes par rapport à y; on cherche le plus grand commun diviseur X' des coefficiens de y dans P', et le plus grand commun diviseur X'' des coefficiens de y dans P'' (n° 33, 1°). On divise P' par X' et P'' par X'' (n° 27, 4°); ce qui donne des quotiens A', B'. On a, $P' = X'A'$, $P'' = X''B'$.

On ordonne A' et B' par rapport aux puissances décroissantes de x. On cherche le plus grand commun diviseur Y' des coefficiens de x dans A', et le plus grand commun diviseur Y'' des coefficiens de x dans B'. On divise A' par Y' et B' par Y''; ce qui fournit des quotiens A'', B'', qui n'admettent plus aucun diviseur indépendant de l'une des lettres x, y, ni aucun diviseur monome. On a,

$$A' = Y'A'', \quad B' = Y''B''; \text{ d'où } P' = X'Y'A'', \quad P'' = X''Y''B''.$$

Les polynomes X', X'', ne contenant que la seule lettre x, il sera facile de trouver leur plus grand commun diviseur X (n° 33, 1°). On déterminera de même le plus grand commun diviseur Y des polynomes Y', Y''. On divisera les polynomes X', X'', par X, et les polynomes Y', Y'', par Y; ce qui donnera des quotiens exacts, x', x'', y', y''. On aura,

$$X' = Xx', \quad X'' = Xx'', \quad Y' = Yy', \quad Y'' = Yy'',$$
$$P' = XYx'y'A'', \quad P'' = XYx''y''B''.$$

Chacun des facteurs x', y', étant premier avec x'' et avec y'', les produits $x'y'$, $x''y''$, sont premiers entre eux (n° 17, 9°). On obtiendra donc le plus grand commun diviseur des polynomes P', P'', en multipliant leur facteur commun XY, par le plus grand commun diviseur entre A'' et B'' (n° 19).

La question se trouve ainsi réduite à chercher le plus grand

commun diviseur fonction de x et y, entre deux polynomes A'', B'', qui n'admettent aucun diviseur indépendant de l'une des lettres x, y, et qui ne sont divisibles par aucun monome. Les polynomes A'', B'', étant ordonnés suivant les puissances décroissantes de x, sont de la forme

$$A''=Px^m+Qx^{m-1}+\ldots+Sx+T,\quad B''=px^n+qx^{n-1}+\ldots+sx+t,$$

et les coefficiens P, Q,..., S, T, p, q,..., s, t, ne peuvent renfermer que la seule lettre y, combinée avec des nombres entiers. Soit $m>n$ ou $m=n$. On est conduit à diviser A'' par B''; et comme B'' n'admet aucun diviseur indépendant de l'une des lettres, x, y, ni aucun diviseur monome, toute quantité indépendante de l'une des lettres x, y, ou monome, sera première avec B''; on n'altérera donc pas le plus grand commun diviseur en multipliant ou en divisant les dividendes partiels par des quantités indépendantes de l'une des lettres x, y, ou par des monomes. Par conséquent, lorsque le 1er terme d'un dividende partiel ne sera pas divisible par le coefficient du 1er terme du diviseur, on pourra rendre la division possible, sans altérer le plus grand commun diviseur, en multipliant ce dividende par une quantité indépendante de x, comme il a été indiqué (page 33); et l'on pourra supprimer dans les restes, les facteurs indépendans de l'une des lettres x, y, ainsi que les facteurs monomes. En opérant de cette manière, on ne trouvera que des termes entiers au quotient, et l'on parviendra à un reste R' dans lequel le plus fort exposant de x sera moindre que le plus fort exposant n de x dans le diviseur B''. Le plus grand commun diviseur cherché sera le même que celui des polynomes B'', R'.

Pour ramener la question, à la recherche du plus grand commun diviseur entre deux quantités, qui, comme A'' et B'', n'admettent aucun diviseur indépendant de l'une des lettres x, y, ni aucun diviseur monome, on décompose le reste R' en trois facteurs, par la méthode du n° 35, en observant que R' étant ordonné par rapport à x, il est plus simple de commencer par la recherche du facteur Y_1 indépendant de x.

Ainsi, on détermine le plus grand commun diviseur Y_1 des coefficiens de x dans R′; on divise R′ par Y_1, on ordonne le quotient Q_1 par rapport à y, et l'on détermine le plus grand commun diviseur X_1 des coefficiens de y dans Q_1; on divise Q_1 par X_1, et l'on ordonne le quotient R_1 suivant les puissances décroissantes de x. On a $R' = Y_1X_1R_1$. Le facteur Y_1 est indépendant de x, le facteur X_1 est indépendant de y, et R_1 n'admet aucun diviseur indépendant de l'une des lettres x, y, ni aucun diviseur monome. Chacun des facteurs Y_1, X_1, est premier avec B″, car B″ n'admet aucun diviseur indépendant de l'une des lettres x, y; le produit Y_1X_1 est donc premier avec B″ (n° 17, 5°); le plus grand commun diviseur entre B″ et $R' = Y_1X_1R_1$ est donc le même que celui qui existe entre B″ et R_1 (n° 27, 1°).

La question se trouve ainsi réduite à chercher le plus grand commun diviseur entre deux polynomes entiers B″, R_1, qui sont d'un degré moindre (par rapport à x) que les polynomes primitifs A″, B″, et qui n'admettent aucun diviseur indépendant de l'une des lettres x, y, ni aucun diviseur monome. On pourra donc opérer sur B″ et R_1 comme on vient de le faire sur A″ et B″. De cette manière, la division de B″ par R_1 ne fournira que des termes entiers au quotient, et l'on parviendra à un reste R″ d'un degré moindre (par rapport à x) que R_1. Le plus grand commun diviseur de A″ et B″ sera le même que celui de R_1 et R″. On décomposera semblablement le reste R″ en trois facteurs Y_2, X_2, R_2, et le plus grand commun diviseur des polynomes A″, B″, sera le même que celui des polynomes R_1, R_2, qui n'admettent aucun diviseur indépendant de l'une des lettres x, y, ni aucun diviseur monome. En continuant ces calculs, on n'obtiendra que des termes entiers dans les quotiens, et l'on parviendra à un reste R indépendant de x. Quand R sera nul, le reste précédent, qui contiendra nécessairement x et y, sera le plus grand commun diviseur D de A″ et B″. Lorsque R ne sera pas nul, les polynomes A″, B″, seront premiers entre eux (page 36); de sorte que D sera égal à l'unité.

Pour *mettre en évidence le plus grand commun diviseur* XYD *des polynomes* P′, P″, on divise A″ et B″ par leur plus grand commun diviseur D ; les quotiens A, B, sont premiers entre eux ; on a $A''=DA$, $B''=DB$; et en substituant ces valeurs de A″ et B″ dans les expressions $XYx'y'A''$, $XYx''y''B''$, de P′ et P″ (page 46), on trouve

$$P'=XYDx'y'A, \quad P''=XYDx''y''B.$$

Chacun des facteurs x', y', A, étant premier avec l'un quelconque des facteurs x'', y'', B, les produits $x'y'A$, $x''y''B$, sont premiers entre eux (n° 17, 9°). Le plus grand commun diviseur de P′ et P″ est donc XYD (n° 27, 2°).

37. D'après ce qui précède, pour trouver le plus grand commun diviseur de deux polynomes entiers P′, P″, qui contiennent deux lettres x, y, on ordonne ces polynomes par rapport à y. On détermine le plus grand commun diviseur X′ des coefficiens de y dans P′, et le plus grand commun diviseur X″ des coefficiens de y dans P″ ; on divise P′ par X′ et P″ par X″ ; on ordonne les quotiens A′, B′, suivant les puissances décroissantes de x ; on cherche le plus grand commun diviseur Y′ des coefficiens de x dans A′, et le plus grand commun diviseur Y″ des coefficiens de x dans B′. On calcule, le plus grand commun diviseur X des polynomes X′, X″, et le plus grand commun diviseur Y des polynomes Y′, Y″. On divise A′ par Y′ et B′ par Y″ ; les quotiens A″, B″, n'admettent aucun diviseur indépendant de l'une des lettres x, y, ni aucun diviseur monome. Le plus grand commun diviseur de P′ et P″ est égal au produit de XY par le plus grand commun diviseur D de A″ et B″. Pour calculer D, on divise A″ par B″ (on suppose que le plus fort exposant de x dans A″ n'est pas moindre que dans B″) ; lorsque dans le cours de cette division, on trouve un dividende partiel N dont le coefficient α du 1er terme n'est pas divisible par le coefficient ζ du 1er terme du diviseur B″, on évite les quotiens fractionnaires en multipliant N par ζ, ou ce qui est plus simple, en multipliant N par le produit ζ' des facteurs de ζ qui n'entrent pas dans α (n° 21). De plus, lorsqu'on aperçoit

dans un reste un facteur monome ou un facteur indépendant de l'une des lettres x, y, on supprime ce facteur. On parvient ainsi à un reste R′ dans lequel le plus fort exposant de x est moindre que dans le diviseur B′. On décompose R′ en trois facteurs Y_1, X_1, R_1 (n° 35); le 1er facteur ne peut contenir que la lettre y, le 2e ne peut contenir que x, et R_1 est une fonction de x et y qui ne saurait admettre aucun diviseur indépendant de l'une des lettres x, y, ni aucun diviseur monome. Le plus grand commun diviseur de A″ et B″ est le même que celui de B″ et R_1. On opère sur B″ et R_1, comme on vient de le faire sur les polynomes A″, B″; ce qui conduit à un reste R″ que l'on décompose en trois facteurs Y_2, X_2, R_2. Le plus grand commun diviseur de A″ et B″ est le même que celui de R_1 et R_2. En continuant ces calculs, on parvient à un reste R indépendant de x. Quand R est nul, le reste précédent est le plus grand commun diviseur D de A″ et B″. Quand R n'est pas nul, les polynomes A″, B″, sont premiers entre eux; de sorte que D est égal à l'unité. Le plus grand commun diviseur de P′ et P″ est XYD.

Pour appliquer cette méthode à l'exemple du n° 33 (page 42), on cherche d'abord le *plus grand commun diviseur* X *indépendant de* y, des polynomes P′, P″, proposés; à cet effet, on ordonne ces polynomes par rapport à y, ce qui donne

$$P' = 6(x-1)x^3y^7 + 6(x^3-x^2+x-1)x^2y^6 - 6(x-1)x^2y^5 - 6(x^3-1)x^3y^4,$$
$$P'' = -4(x-1)x^3y^6 + 4(x-1)x^3y^5 + 4(x-1)x^5y^4 - 4(x-1)x^5y^3.$$

On cherche, le plus grand commun diviseur X′ des coefficiens de y dans P′, et le plus grand commun diviseur X″ des coefficiens de y dans P″; on trouve

$$X' = 6x^2(x-1), \quad X'' = 4x^3(x-1).$$

Le plus grand commun diviseur de X′ et X″ est $X = 2x^2(x-1)$.

Pour *calculer le plus grand commun diviseur* Y *indépendant de* x, on divise P′ par X′ et P″ par X″; on ordonne les quotiens A′, B′, par rapport aux puissances décroissantes de x, et l'on trouve,

$$A' = (y^3-1)y^4x^2 + (y^3-1)y^4x + (y-1)y^5,$$
$$B' = (y-1)y^3x^2 - (y-1)y^5.$$

On détermine le plus grand commun diviseur Y′ des coefficiens de x dans A′, et le plus grand commun diviseur Y″ des coefficiens de x dans B′; on trouve $Y' = (y-1)y^4$, $Y'' = (y-1)y^3$. Le plus grand commun diviseur de Y′ et Y″ est $Y = (y-1)y^3$.

Enfin, pour *déterminer le plus grand commun diviseur* D, *fonction de x et y*, on divise A′ par Y′ et B′ par Y″; ce qui fournit les quotiens

$$A'' = (y+1)x^2 + (y^2+y+1)x + y, \quad B'' = x^2 - y^2.$$

La question est réduite à calculer le plus grand commun diviseur D des polynomes A″, B″, qui n'admettent aucun diviseur indépendant de l'une des lettres x, y, ni aucun diviseur monome. On divise A″ par B″, ce qui fournit le quotient $y+1$ et le reste $R' = (y^2+y+1)x + (y^2+y+1)y$.

Pour décomposer le reste R′ en facteurs, on cherche le plus grand commun diviseur Y_1 des coefficiens de x dans R′, et l'on voit que $Y_1 = y^2+y+1$. La division de R′ par Y_1 fournit le quotient $Q' = (x+y)$. Ce quotient n'admettant pas de diviseur X_1 indépendant de x, on a $X_1 = 1$, et $R_1 = Y_1(x+y)$. Le plus grand commun diviseur de A″ et B″ est le même que celui de B″ et R_1, et ce dernier commun diviseur est le même que celui de B″ et $(x+y)$. On divise B″ par $x+y$, ce qui donne le quotient $x-y$ et le reste R = o. Le plus grand commun diviseur de A″ et B″ est $D = x+y$; et le plus grand commun diviseur des polynomes P′, P″, proposés, est

$$XYD = 2x^2(x-1)(y-1)y^3(x+y) = 2x^2y^3(x-1)(y-1)(x+y).$$

Ce qui s'accorde avec le résultat obtenu (page 43).

Pour mettre en évidence le plus grand commun diviseur XYD des polynomes P′, P″, on divise A″ et B″ par D; ce qui donne les quotiens $A = (y+1)x+1$, $B = x-y$.

On divise ensuite les polynomes X′, X″, par X, et les polynomes Y′, Y″, par Y; ce qui fournit les quotiens,

$$x' = 3, \quad x'' = 2x, \quad y' = y, \quad y'' = 1.$$

En substituant ces valeurs, dans les formules générales $P'=XYD\,x'y'A$, $P''=XYD\,x''y''B$, (page 49), on trouve

$$P'=2x^2y^3(x-1)(y-1)(x+y)\times 3y(xy+x+1),$$
$$P''=2x^2y^3(x-1)(y-1)(x+y)\times 2x(x-y).$$

Remarque. On peut simplifier ces calculs en cherchant d'abord le plus grand commun diviseur monome M des polynomes P', P''; à cet effet, on détermine les plus grands communs diviseurs monomes M', M'', des polynomes P', P''. On trouve, $M'=6x^2y^4$, $M''=4x^3y^3$.

Le plus grand commun diviseur de M' et M'' est $M=2x^2y^3$. On divise P' par M' et P'' par M'', ce qui donne pour quotiens les polynomes A, B (page 43). On décompose ensuite les polynomes A, B, en facteurs, par la méthode du n° 35, et l'on trouve $X=x-1$, $Y=y-1$, $D=x+y$.

Le plus grand commun diviseur de P' et P'' est

$$MXYD=2x^2y^3(x-1)(y-1)(x+y).$$

2e Exemple. Soient les deux polynomes

$$P=24x^4y^6-24x^2y^6-12x^5y^5+12x^3y^5-24x^6y^4+24x^3y^4$$
$$+12x^7y^3-12x^3y^3+24x^6y^2-24x^4y^2-12x^7y+12x^5y,$$

$$Q=-4x^3y^4-4x^2y^4+8xy^4+2x^4y^3+10x^3y^3+4x^2y^3-16xy^3+2x^5y^2-2x^4y^2$$
$$+4x^3y^2+20x^2y^2-24xy^2-4x^5y-10x^4y+2x^3y+12x^2y-6x^5-6x^4+12x^3.$$

Le plus grand commun diviseur monome de P est $M'=12x^2y$, et celui de Q est $M''=2x$. Le plus grand commun diviseur de M' et M'' est $M=2x$. De sorte que le *plus grand diviseur monome commun à* P *et* Q est $M=2x$.

Pour trouver le *plus grand commun diviseur polynome* de P et Q, on divise P par M' et Q par M''; les quotiens, ordonnés par rapport à y, sont

$$P'=2(x^2-1)y^5-(x^2-1)xy^4-2(x^4-1)y^3+(x^4-1)xy^2$$
$$+2(x^2-1)x^2y-(x^2-1)x^3,$$

$$P''=-2(x^2+x-2)y^4+(x^3+5x^2+2x-8)y^3+(x^4-x^3+2x^2+10x-12)y^2$$
$$-(2x^3+5x^2-x-6)xy-3(x^2+x-2)x^2.$$

Le plus grand commun diviseur des coefficiens de y dans P' est $X' = x^3 - 1$, et celui des coefficiens de y dans P'' est $X'' = x^3 + x - 2$. Le plus grand commun diviseur de X' et X'' est $X = x - 1$.

On divise P' par X' et P'' par X''; les quotiens ordonnés par rapport à x sont

$$A' = (y^3-1)x^3 - 2(y^3-1)yx^2 - (y^3-1)y^2x + 2(y^3-1)y^3,$$
$$B' = (y^3-2y-3)x^3 + (y^3-2y-3)yx - 2(y^3-2y-3)y^2.$$

Le plus grand commun diviseur des coefficiens de x dans A' est $Y' = y^3 - 1$, et celui des coefficiens de x dans B' est $Y'' = y^3 - 2y - 3$. Le plus grand commun diviseur de Y' et Y'' est $Y = y + 1$.

On divise A' par Y' et B' par Y''; ce qui donne les quotiens

$$A'' = x^3 - 2yx^2 - y^2x + 2y^3, \qquad B'' = x^2 + yx - 2y^2.$$

Pour trouver le plus grand commun diviseur de A'' et B'', on divise A'' par B'', ce qui donne le quotient $x - 3y$ et le reste $R' = 4y^2(x - y)$. Le plus grand commun diviseur de B'' et R' étant le même que celui de B'' et $x - y$, on divise B'' par $x - y$; ce qui donne le quotient $x + 2y$, et le reste $R = 0$. Le plus grand commun diviseur de A'' et B'' est donc $D = x - y$; et par suite le plus grand commun diviseur de P et Q est

$$MXYD = 2x(x-1)(y+1)(x-y).$$

Si l'on veut mettre ce plus grand commun diviseur en évidence dans P et Q, on observe d'abord que d'après les calculs ci-dessus, on a $P = M'X'Y'A''$, $Q = M''X''Y''B''$.

On divise successivement, M' et M'' par M, X' et X'' par X, Y' et Y'' par Y, et enfin A'' et B'' par D; ce qui donne des quotiens m', m'', x', x'', y', y'', A et B. On trouve,

$$\frac{M'}{M} = m' = 6xy, \quad \frac{M''}{M} = m'' = 1,$$
$$\frac{X'}{X} = x' = x+1, \quad \frac{X''}{X} = x'' = x+2,$$
$$\frac{Y'}{Y} = y' = y-1, \quad \frac{Y''}{Y} = y'' = y-3,$$
$$\frac{A''}{D} = A = x^2 - yx - 2y^2, \quad \frac{B''}{D} = B = x+2y.$$

On en déduit, $P = MXYDm'x'y'A$, $Q = MXYDm''x''y''B$,
$P = 2x(x-1)(y+1)(x-y) \times 6xy(x+1)(y-1)(x^2-yx-2y^2)$,
$Q = 2x(x-1)(y+1)(x-y) \times (x+2)(y-3)(x+2y)$.

Chacun des facteurs m', x', y', A, étant premier avec chacun des facteurs m'', x'', y'', B, les produits $m'x'y'A$, $m''x''y''B$, sont premiers entre eux (n° 17, 9°). Le plus grand commun diviseur des polynomes P, Q, est donc

$$MXYD = 2x(x-1)(y+1)(x-y).$$

38. Pour appliquer la méthode du n° 37 à la *recherche du plus grand commun diviseur d'un nombre quelconque de polynomes* P′, P″, P‴, ..., *contenant deux lettres* x, y, on décompose chacun de ces polynomes en trois facteurs (n° 35), et l'on trouve

$$P' = X'Y'A'', \quad P'' = X''Y''B'', \quad P''' = X'''Y'''C''', \ldots.$$

On cherche le plus grand commun diviseur X de X′, X″, X‴, ..., et le plus grand commun diviseur Y de Y′, Y″, Y‴, ...; enfin on calcule, par la méthode du n° 37, le plus grand commun diviseur D des polynomes A″, B″, C″, ..., qui n'admettent aucun diviseur indépendant de l'une des lettres x, y, ni aucun diviseur monome. Le plus grand commun diviseur demandé, de P′, P″, P‴, ..., est XYD.

On pourra opérer d'une manière analogue, pour calculer le plus grand commun diviseur d'un nombre quelconque de polynomes contenant trois lettres. Et ainsi de suite.

§ III. *Résolution de deux équations numériques à deux inconnues. Théorie de l'Élimination.*

39. Lorsqu'on a plusieurs équations entre plusieurs inconnues, *résoudre* ces équations, c'est chercher les divers systèmes de valeurs des inconnues qui rendent toutes ces équations identiques ; chacun de ces systèmes fournit une *solution* des équations proposées ; et selon que des valeurs substituées pour les inconnues satisfont ou ne satisfont pas à toutes les équations proposées, on dit que ces valeurs sont *bonnes* ou qu'elles sont *étrangères*.

Nous supposerons que les équations proposées sont numériques et qu'elles ne renferment que des puissances entières positives des inconnues x, y ; *nous n'admettrons que les valeurs finies des inconnues*.

40. Quand *l'une des deux équations proposées ne renferme que l'une des inconnues, x, y, on obtient toutes les solutions de ces équations en résolvant des équations à une seule inconnue*.

En effet, soit le système, $F(y)=0$, $f(x, y)=0$.

Chaque valeur β de y tirée de $F(y)=0$, et substituée dans $f(x,y)=0$, donne l'équation à une seule inconnue $f(x,\beta)=0$, qui détermine les valeurs de x correspondantes à $y=\beta$.

Exemple. Soit le système,

$$y^2-5y+6=0,\quad x^2-(2y+1)x+(y^2+y-2)=0.$$

La 1re équation donne $y=2$ et $y=3$.

Pour trouver les valeurs de x correspondantes à $y=2$, on fait $y=2$ dans la 2e équation, ce qui fournit l'équation à une seule inconnue $x^2-5x+4=0$; on en déduit $x=1$ et $x=4$.

On trouvera semblablement que les valeurs de x correspondantes à $y=3$, sont $x=2$ et $x=5$.

De sorte que les équations proposées admettent les quatre solutions,

$$y=2,\ x=1 \parallel y=2,\ x=4 \parallel y=3,\ x=2 \parallel y=3,\ x=5.$$

41. *Lorsque, les deux inconnues, x, y, entrant à la fois dans chaque équation, une de ces équations est du premier ou du second degré par rapport à l'une des inconnues, on peut ramener ce cas au précédent.* En effet :

1°. Soient les équations, $px - q = 0$, $f(x,y) = 0$,

dans lesquelles p et q sont des fonctions rationnelles et entières de la seule inconnue y. La 1re équation donne $x = \frac{q}{p}$; et la substitution de cette expression de x dans $f(x,y) = 0$, fournit une équation $f\left(\frac{q}{p}, y\right) = 0$, qui ne renferme que y. Chaque valeur de y, tirée de cette dernière équation et substituée dans l'expression $\frac{q}{p}$ de x, fournit la valeur correspondante de x. Les valeurs de x et y, ainsi déterminées, satisfont nécessairement aux équations proposées.

2°. Soient les équations, $px^2 + qx + r = 0$, $f(x,y) = 0$,

dans lesquelles p, q, r, sont des fonctions rationnelles et entières de la seule inconnue y. La 1re équation donne

$$x = \frac{1}{2p}(-q + \sqrt{q^2 - 4pr}), \quad x = \frac{1}{2p}(-q - \sqrt{q^2 - 4pr}).$$

La substitution de la 1re valeur de x dans $f(x,y) = 0$, conduira à un résultat de la forme $Q = P\sqrt{q^2 - 4pr}$,

dans lequel, P et Q seront des fonctions rationnelles et entières de y. Pour *faire disparaître le radical*, on élevera les deux membres au quarré, ce qui donnera l'*équation rationnelle*

$$Q^2 = P^2(q^2 - 4pr), \quad \text{d'où} \quad (1).. \; Q^2 - P^2(q^2 - 4pr) = 0.$$

On serait conduit à la même équation en substituant la 2e valeur de x dans $f(x,y) = 0$; car cette 2e valeur de x ne différant de la 1re que par le signe du radical, le résultat de

cette substitution serait $Q=-P\sqrt{q^2-4pr}$; et en élevant les deux membres au quarré, on parviendrait encore à l'équation (1).

L'équation (1) *détermine toutes les valeurs de y qui conviennent aux équations proposées;* car ces valeurs doivent satisfaire à l'une des équations

$$Q-P\sqrt{q^2-4pr}=0; \quad Q+P\sqrt{q^2-4pr}=0,$$

et toutes les racines de ces deux dernières équations sont fournies par l'équation

$$(Q-P\sqrt{q^2-4pr})\times(Q+P\sqrt{q^2-4pr})=0,$$

qui se réduit à

$$(1)\ldots Q^2-P^2(q^2-4pr)=0.$$

Pour trouver la valeur α de x correspondante à une valeur $\mathcal{C}$ de y, tirée de l'équation (1), on pourrait faire $y=\mathcal{C}$ dans les équations proposées; p, q et r prendraient des valeurs particulières, p', q', r'; et $x=\alpha$ devant satisfaire aux équations $p'x^2+q'x+r'=0$, $f(x,\mathcal{C})=0$, qui ne renferment que la seule inconnue x, les premiers membres de ces équations devraient admettre un commun diviseur $x-\alpha$; de sorte qu'en cherchant le plus grand commun diviseur $\varphi(x)$ entre $p'x^2+q'x+r'$ et $f(x,\mathcal{C})$, l'équation $\varphi(x)=0$, déterminerait toutes les valeurs de x correspondantes à $y=\mathcal{C}$.

Mais *on peut parvenir plus simplement aux mêmes solutions.* En effet :

$(2)..x=\frac{1}{2p}(-q+\sqrt{q^2-4pr})$ a donné $(3)..Q=P\sqrt{q^2-4pr}$,

$(4)..x=\frac{1}{2p}(-q-\sqrt{q^2-4pr})$ a donné $(5)..Q=-P\sqrt{q^2-4pr}$.

On obtiendra donc toutes les valeurs de x et y qui conviennent aux équations proposées, en cherchant successivement les solutions de chacun des deux systèmes (2), (3), et (4), (5).

On sait d'ailleurs que toutes les bonnes valeurs de y sont fournies par l'équation (1).

Pour trouver la valeur α de x, correspondante à une valeur ζ de y, tirée de (1), on fait $y=\zeta$ dans (3) et dans (5).

Si $y=\zeta$ satisfait à (3) et à (5), cette valeur de y donnera nécessairement $Q=0$ et $P\sqrt{q^2-4pr}=0$; car en ajoutant les équations (3), (5), membre à membre, on trouve $2Q=0$, d'où $Q=0$; et par suite, chacune des relations (3), (5), donne $P\sqrt{q^2-4pr}=0$. Les relations (2), (4), fourniront les deux bonnes valeurs de x qui correspondent à $y=\zeta$.

Si $y=\zeta$ ne satisfait qu'à (3), il n'y aura qu'une valeur correspondante de x; cette valeur sera donnée par la relation (2).

Si $y=\zeta$ ne satisfait qu'à (5), la valeur correspondante de x sera fournie par la relation (4).

Il résulte de cette discussion, que si l'on se bornait, comme cela paraîtrait naturel, à substituer dans (2) et dans (4) les valeurs de y tirées de (1), on trouverait quelquefois des valeurs de x qui ne conviendraient pas aux équations proposées.

Exemple. Soient les équations, $x^3-2yx+y^2-y=0$,

$$x^3-3yx^2+(3y^2-y+1)x-(y^3-y^2+2y)=0.$$

La 1re donne (6)..$x=y+\sqrt{y}$, et (7)..$x=y-\sqrt{y}$.

En substituant successivement ces valeurs de x, dans la 2e équation, on parvient aux *équations irrationnelles*

$$(8)\ldots y=\sqrt{y}\ , \qquad (9)..y=-\sqrt{y},$$

qui conduisent à la même *équation rationnelle* $y^2=y$; d'où $y^2-y=0$. On en tire $y=1$ et $y=0$.

Pour obtenir la valeur de x correspondante à $y=1$, on pourrait faire $y=1$ dans les premiers membres des équations proposées, ce qui donnerait $x^2-2x=0$, $x^3-3x^2+3x-2=0$; on chercherait le plus grand commun diviseur entre les premiers membres de ces deux dernières équations; ce commun diviseur serait $x-2$; et l'équation $x-2=0$, fournirait la valeur $x=2$ qui correspond à $y=1$. Mais, les bonnes va-

leurs de x et y, devant satisfaire au système (6), (8), ou au système (7), (9), on fera $y=1$ dans (8) et (9); $y=1$ satisfait à (8) et ne satisfait pas à (9); on trouvera donc la seule valeur de x qui correspond à $y=1$, en faisant $y=1$ dans (6); ce qui donnera $x=2$.

On reconnaîtra de même que la valeur de x correspondante à $y=0$ est $x=0$. Ces valeurs de x et y satisfont à chacun des systèmes (6), (8), et (7), (9).

Les équations proposées n'admettent donc que les deux solutions $y=1, x=2$ || $y=0, x=0$.

Si l'on substituait la valeur $y=1$, dans (6) et (7), on trouverait $x=2$, $x=0$, et les valeurs $y=1$, $x=0$, ne conviennent pas aux équations proposées.

42. Nous allons faire voir que *lorsque les deux inconnues*, x, y, *entrant à la fois dans chacune des deux équations proposées*, (1).. $A=0$, $B=0$, *on ne sait résoudre aucune de ces équations par rapport à l'une des inconnues*, x, y, *le procédé du plus grand commun diviseur, appliqué aux polynomes* A, B, *fournit le moyen de faire dépendre la résolution du système* (1), *de celle d'un autre système de la forme*, $F(y)=0$, $f(x, y)=0$. Et l'on a vu (n° 40) comment on trouve les solutions de ce nouveau système.

Pour qu'une valeur c de y convienne au système (1), il faut et il suffit que la substitution de cette valeur de y dans A et B, donne deux fonctions A', B', de x, qui soient réduites à zéro par une même valeur α de x; de telle sorte que les polynomes A', B', admettent un commun diviseur $x-\alpha$. Par conséquent, si l'on cherche le plus grand commun diviseur entre les polynomes A, B, ordonnés suivant les puissances décroissantes de x, et si l'on continue les calculs jusqu'à ce qu'on parvienne au reste R indépendant de x (ce reste ne peut contenir que la seule inconnue y), en ayant soin d'éviter les quotiens fractionnaires et de ne supprimer dans les restes successifs aucun facteur fonction de y, toutes les valeurs de y qui satisfont au système (1) devront réduire R à zéro; car on vient

de voir que si l'on substitue ces bonnes valeurs de y dans A et B, les fonctions A', B', de x, qui résultent de cette substitution, doivent admettre un commun diviseur fonction de x. *Toutes les bonnes valeurs de y, seront donc déterminées par l'équation à une seule inconnue* $R = o$.

Pour obtenir les *bonnes valeurs* de x correspondantes à une valeur $\mathcal{C}$ de y, tirée de $R = o$, on pourrait faire $y = \mathcal{C}$ dans les polynomes A, B, et chercher le plus grand commun diviseur $\varphi(x)$ entre les fonctions A', B', de x, qui résulteraient de cette substitution; l'équation à une seule inconnue $\varphi(x) = o$, déterminerait les bonnes valeurs de x correspondantes à $y = \mathcal{C}$. Mais nous allons indiquer une méthode plus expéditive. Nous distinguerons deux cas :

1er Cas. Lorsque dans tout le cours des divisions successives, auxquelles conduit la recherche du plus grand commun diviseur entre les polynomes A, B, le coefficient du 1er terme de chaque dividende partiel est divisible par le coefficient du 1er terme du diviseur, et lorsqu'on ne supprime dans les restes successifs aucun facteur fonction de y, les valeurs de x et y qui satisfont aux équations proposées sont les mêmes que celles qui réduisent deux restes consécutifs quelconques à zéro. En effet, supposons que les polynomes A, B, étant ordonnés suivant les puissances décroissantes de x, le plus fort exposant m de x dans A ne soit pas moindre que le plus fort exposant n de x dans B; la division de A par B donnera un quotient entier Q', et un reste R' dans lequel le plus fort exposant n', de x, sera moindre que n; la division de B par R' donnera un quotient entier Q'', et un reste R'' dans lequel le plus fort exposant n'', de x, sera moindre que n'. En continuant ainsi à diviser les restes successifs les uns par les autres, on parviendra nécessairement à un reste R indépendant de x, après un nombre de divisions qui sera tout au plus égal à n; car les plus forts exposans n, n', n'', ..., de x, dans le 1er diviseur B et les restes successifs R', R'', ..., sont des nombres entiers positifs qui vont en diminuant; on aura

$$A = BQ' + R', \quad B = R'Q'' + R'', \quad R' = R''Q''' + R''', \text{ etc.}$$

La 1re identité fait voir que toutes les valeurs finies de x et y qui réduisent A et B à zéro, rendent R′ nul, et que toutes les valeurs finies de x et y, qui réduisent B et R′ à zéro, rendent A nul ; car le quotient Q′ ne contenant que des puissances positives de x et y, ne saurait devenir infini pour des valeurs finies de ces inconnues.

Les solutions du système (1)... $A=0, B=0$, sont donc les mêmes que celles du système (2)... $B=0, R'=0$.

On verra d'une manière semblable, que d'après l'identité $B=R'Q''+R''$, les solutions du système (2) sont les mêmes que celles du système (3)... $R'=0, R''=0$.

Et ainsi de suite. Ce qui démontre les propriétés énoncées.

Lorsque après avoir effectué les calculs précédens, on aura trouvé les deux derniers restes R_1, R, les équations $R=0$, $R_1=0$, traitées par la méthode du n° 40, fourniront toutes les solutions du système (1)... $A=0, B=0$.

L'équation $R=0$, ne pouvant contenir que la seule inconnue y, déterminera toutes les valeurs de cette inconnue qui satisfont au système (1) ; et comme elle ne saurait donner des valeurs de y *étrangères* à ce système, on dit par cette double raison que $R=0$ est l'*équation finale* en y résultante de l'*élimination* de x entre les équations (1).

En général : lorsque nous dirons qu'une équation $\varphi(y)=0$ est l'ÉQUATION FINALE en y résultante de l'élimination de x entre deux équations (1)... $A=0$, $B=0$, renfermant les deux inconnues, x, y, nous sous-entendrons que toutes les valeurs de y propres à satisfaire au système (1) sont données par l'équation $\varphi(y)=0$, que ces valeurs conduisent à toutes les solutions du système (1), et que $\varphi(y)=0$ ne saurait donner des valeurs de y étrangères au système (1).

EXEMPLE. *Soient les deux équations*,

$$A=x^3-3yx^2+(3y^2-y+1)x-(y^3-y^2+2y)=0,$$
$$B=x^2-2yx+(y^2-y)=0.$$

La division de A par B fournit le quotient entier $x-y$, et

le reste $R_1 = x - 2y$; on divise B par R_1, ce qui donne le quotient entier x et le reste $R = y^2 - y$.

Les solutions des équations proposées sont donc les mêmes que celles des équations $x - 2y = 0$, $y^2 - y = 0$.

L'équation finale en y est $y^2 - y = 0$, ou $(y - 1)\, y = 0$.

On en tire, $y = 1$ et $y = 0$; les valeurs correspondantes de x, déduites de $x - 2y = 0$, sont $x = 2$ et $x = 0$. De sorte que les équations proposées admettent les deux solutions

$$y = 1, \quad x = 2 \quad \| \quad y = 0, \quad x = 0.$$

Ce qui s'accorde avec les résultats du n° 41 (page 59).

Remarque. Si l'on éliminait y entre les équations proposées, l'équation finale en x serait $(x-2)\,(x-0) = 0$, ou $x^2 - 2x = 0$.

2e Cas. Lorsque dans la recherche du plus grand commun diviseur entre les premiers membres des équations proposées (1)... $A = 0$, $B = 0$, le coefficient du premier terme de chaque dividende partiel n'est pas divisible par le coefficient du 1er terme du diviseur, on évite les quotiens fractionnaires en multipliant les dividendes par des quantités indépendantes de la lettre x par rapport à laquelle on a ordonné (n° 31). Ces multiplications introduiront quelquefois des valeurs de y étrangères au système (1) ; de sorte que des valeurs de x et y qui réduiront deux restes consécutifs à zéro, pourront ne pas convenir au système (1). Mais, si l'on a soin de ne supprimer dans les restes successifs aucun facteur fonction de y, afin de ne pas ôter des valeurs de y qui substituées dans A et B introduisent un commun diviseur fonction de x entre les fonctions A', B', de x, résultantes de ces substitutions, toutes les valeurs de x, y, qui conviennent au système (1), réduiront à zéro deux restes consécutifs quelconques, R_k, R_{k+1}. Ainsi, le système $R_k = 0$, $R_{k+1} = 0$, fournira quelquefois des valeurs de y qui ne conviendront pas au système (1), mais il déterminera nécessairement toutes les solutions du système (1).

Nous démontrerons d'abord que si dans le cours de la division qui a conduit au reste R' d'un degré moindre, par rapport à x, que le diviseur B, il a fallu multiplier le divi-

dende A et les restes successifs r, r', r'', ..., par des quantités ∂, ∂', ∂'', ∂''', ..., indépendantes de x, pour n'obtenir au quotient que des termes entiers, q, q', q'', q''', ..., la division de $A\partial\partial'\partial''\partial'''$..., par B conduirait au même reste R' et à un autre quotient entier, sans qu'il soit nécessaire, pour éviter les fractions, de multiplier les dividendes par des quantités indépendantes de x.

Par exemple, supposons qu'il faille calculer trois termes au quotient, pour parvenir au reste R'; on aura

$$A\partial = Bq + r, \quad r\partial' = Bq' + r', \quad r'\partial'' = Bq'' + R'.$$

La 1re égalité donnant $A\partial\partial'\partial'' = Bq\partial'\partial'' + r\partial'\partial''$, on voit que si l'on divise $A\partial\partial'\partial''$ par B, le 1er terme du quotient sera l'entier $q\partial'\partial''$, et le reste sera $r\partial'\partial''$. La 2e égalité donnant $r\partial'\partial'' = Bq'\partial'' + r'\partial''$, la division de $r\partial'\partial''$ par B fournira le quotient entier $q'\partial''$ et le reste $r'\partial''$. Enfin, la 3e égalité $r'\partial'' = Bq'' + R'$, fait voir que la division de $r'\partial''$ par B donnera le quotient entier q'' et le reste R'. De sorte que la division de $A\partial\partial'\partial''$ par B, fournit le quotient entier..... $q\partial'\partial'' + q'\partial'' + q''$ et le reste R'. Ce qui démontre la propriété énoncée.

D'après cette propriété : si l'on désigne par a le produit des quantités ∂, ∂', ∂'', ..., indépendantes de x, par lesquelles on a dû multiplier les dividendes partiels pour parvenir au reste R', sans introduire des termes fractionnaires au quotient, la division de Aa par B donnera un quotient entier Q', et le même reste R'; on aura donc

$$Aa = BQ' + R', \quad \text{d'où } R' = Aa - BQ'.$$

Cette dernière identité démontre que toute solution $x = \alpha$, $y = \zeta$, du système (1) ... $A = 0$, $B = 0$, convient au système (2) ... $B = 0$, $R' = 0$; car aucune des quantités entières, a, Q', ne pouvant devenir infinie quand on y fait $x = \alpha$, $y = \zeta$, ces valeurs finies de x et y réduisent nécessairement l'expression, $Aa - BQ'$, de R' à zéro.

La réciproque n'est pas généralement vraie : *une solution*

$x=\alpha'$, $y=\zeta'$, du système (2), *peut ne pas convenir au système* (1). En effet, les valeurs α', ζ', de x et y, substituées dans $Aa=BQ'+R'$, donnant $Aa=0$, il peut arriver qu'elles ne réduisent pas A à zéro, puisque a étant fonction de y, l'hypothèse $y=\zeta'$ peut rendre a nul en réduisant à zéro l'un des facteurs δ, δ', δ'', ..., de a.

Cependant la valeur $y=\zeta'$, qui réduit à zéro l'un des facteurs de a, convient quelquefois au système (1); car l'on conçoit que $x=\alpha'$, $y=\zeta'$, peut réduire A à zéro.

Mais, quand $y=\zeta'$ ne réduit à zéro aucun des facteurs δ, δ', δ'', ..., de a, la solution $x=\alpha'$, $y=\zeta'$, du système (2), convient nécessairement au système (1); car a n'étant pas nul, la relation $Aa=0$ donne $A=0$.

Par conséquent, le système (2)... $B=0$, $R'=0$, détermine non-seulement toutes les solutions du système (1)...$A=0$, $B=0$, mais quelquefois il donne en outre des valeurs de x et y qui ne conviennent pas aux équations (1) proposées.

Remarque. Les identités $A\delta=Bq+r$, $r\delta'=Bq'+r'$, ..., démontrent que toute solution $x=\alpha$, $y=\zeta$, du système (1), réduit aussi à zéro les restes partiels r, r', ..., qui ont conduit au reste R' d'un degré moindre, par rapport à x, que le diviseur B; mais que des valeurs de x et y, qui réduisent à zéro deux des restes r', r'', ..., R', peuvent ne pas convenir au système (1); car, par exemple, si $x=\alpha''$, $y=\zeta''$, réduit r et r' à zéro, l'identité $r\delta'=Bq'+r'$ prouve que Bq' devient nul, ce qui peut avoir lieu sans que B se réduise à zéro, puisque q' peut devenir nul.

En opérant sur les équations (2) comme on vient de le faire sur les équations (1), on est conduit à diviser B par R'. Soit b le produit de toutes les quantités γ, γ', γ''..., indépendantes de x, par lesquelles il a fallu multiplier les dividendes successifs pour n'obtenir que des termes entiers au quotient, et pour parvenir au reste R'' d'un degré moindre par rapport à x que le diviseur R'; il résulte de ce qui vient d'être démontré (page 63), que la division de Bb par R' conduirait au même reste R'' et donnerait un quotient entier Q''.

Les identités $Aa = BQ' + R'$, $Bb = R'Q'' + R''$, démontrent que toutes les solutions du système (1) .. $A = 0$, $B = 0$, satisfont au système (3)... $R' = 0$, $R'' = 0$.

La réciproque n'est pas généralement vraie : une solution $x = \alpha'$, $y = \mathcal{C}'$, du système (3), peut ne pas convenir au système (1). En effet, les identités précédentes donnant

$$Bb = R'Q'' + R'', \quad Aab = BbQ' + R'b,$$

les valeurs $x = \alpha'$, $y = \mathcal{C}'$, qui réduisent R' et R'' à zéro, donneront $Bb = 0$, $Aab = 0$; ce qui peut avoir lieu sans que A et B deviennent nuls, puisque $y = \mathcal{C}'$ peut réduire à zéro l'un des facteurs δ, δ', δ'', ..., γ, γ', γ'', ..., de a ou de b.

Cependant, la valeur $y = \mathcal{C}'$, qui réduit à zéro l'un des facteurs δ, δ', δ'', ..., γ, γ', γ'', ..., convient quelquefois aux équations (1) ; car l'on conçoit que le système des valeurs $x = \alpha'$, $y = \mathcal{C}'$, peut réduire A et B à zéro.

Mais, si $y = \mathcal{C}'$ ne réduit à zéro aucun des facteurs δ, δ', ..., γ, γ', ..., les produits a, b, ne deviendront pas nuls, et la solution $x = \alpha'$, $y = \mathcal{C}'$, du système (3), conviendra nécessairement au système (1) ; car Bb et Aab devenant nuls, il faut que les valeurs $x = \alpha'$, $y = \mathcal{C}'$, réduisent A et B à zéro.

En continuant ainsi à diviser les restes successifs les uns par les autres, on verra que toutes les valeurs de x et y qui conviennent aux équations (1) proposées, réduisent deux restes consécutifs quelconques à zéro ; mais que des valeurs $x = \alpha'$, $y = \mathcal{C}'$, qui réduisent deux restes consécutifs à zéro, peuvent ne pas convenir aux équations (1) proposées. De plus, la valeur $y = \mathcal{C}'$ ne saurait être *étrangère* au système (1), que lorsqu'elle réduit à zéro l'une des quantités δ, δ', δ'', ..., γ, γ', γ'', ..., par lesquelles on a multiplié les dividendes successifs pour éviter les quotiens fractionnaires.

Par conséquent : *si l'on continue les divisions jusqu'à ce qu'on parvienne au reste* R *indépendant de* x, *et si* R_1 *désigne le reste précédent, le système* (4)... $R = 0$, $R_1 = 0$, *fournira non-seulement toutes les solutions du système* (1)... $A = 0$, $B = 0$, *mais quelquefois il donnera en outre des valeurs de* x *et* y

qui ne conviendront pas aux équations (1) *proposées. Une solution* $x=\alpha'$, $y=\zeta'$, *du système* (4) *ne saurait être* ÉTRANGÈRE *au système* (1), *que si* $y=\zeta'$ *réduit à zéro l'une des quantités,* $\delta, \delta', \delta'', \ldots, \gamma, \gamma', \gamma'', \ldots$, *par lesquelles il a fallu multiplier les dividendes successifs, pour n'obtenir que des termes entiers dans les quotiens; mais quelquefois, la valeur* $y=\zeta'$ *qui réduit à zéro l'un des multiplicateurs* $\delta, \delta', \delta'', \ldots, \gamma, \gamma', \gamma'', \ldots$, *convient cependant au système* (1)... $A=0$, $B=0$.

D'après ces propriétés, si l'on désigne par $\varphi(y)=0$ l'équation finale en y qui ne donne que toutes les valeurs de y propres à satisfaire au système (1), le reste R indépendant de x sera généralement le produit de $\varphi(y)$ par une quantité entière P indépendante de x. Lorsque P sera un nombre, ou sera l'unité, l'équation $R=0$ ne donnera que les bonnes valeurs de y. Lorsque P contiendra y, l'équation $R=0$ donnera non-seulement toutes les bonnes valeurs de y, mais en outre des valeurs de y, fournies par l'équation $P=0$, qui pourront ne pas convenir au système (1).

REMARQUE. On peut simplifier les calculs précédens en supprimant dans chaque reste le plus grand commun diviseur entre les coefficiens numériques des différens termes de ce reste; car les valeurs de x et y qui réduisent des polynomes à zéro, ne changent pas, quand on divise ces polynomes par des nombres.

43. D'après les discussions précédentes :

1°. Lorsqu'une solution $x=\alpha'$, $y=\zeta'$, du système (4)... $R=0$, $R_1=0$, est telle que $y=\zeta'$ ne réduit à zéro aucune des quantités $\delta, \delta', \delta'', \ldots, \gamma, \gamma', \gamma'', \ldots$, par lesquelles il a fallu multiplier les dividendes successifs pour éviter les quotiens fractionnaires, ces valeurs de x et y réduisent nécessairement à zéro tous les restes, ainsi que A et B; de sorte que $x=\alpha'$, $y=\zeta'$, est une solution du système

$$(1)\ldots A=0,\quad B=0.$$

2°. Lorsqu'une solution $x=\alpha'$, $y=\zeta'$, du système (4) est telle que $y=\zeta'$ réduit à zéro l'un des multiplicateurs $\delta, \delta', \delta'', \ldots, \gamma, \gamma', \gamma'', \ldots$, les valeurs α', ζ', de x et y, peu-

vent ne pas convenir au système (1); et pour s'en assurer, il suffit de faire $x = \alpha'$, $y = \zeta'$, dans A et B.

3°. Pour reconnaître si une solution $x = \alpha'$, $y = \zeta'$, du système (4), convient au système (1), on fait $y = \zeta'$ dans les multiplicateurs δ, δ', δ'',..., γ, γ', γ'',... Quand aucun de ces multiplicateurs ne devient nul, on est certain que $x = \alpha'$, $y = \zeta'$, est une solution du système (1). Lorsque $y = \zeta'$ réduit l'un de ces multiplicateurs à zéro, les valeurs $x = \alpha'$, $y = \zeta'$, peuvent ne pas convenir au système (1), et l'on s'en assure en faisant $x = \alpha'$, $y = \zeta'$, dans A et B.

4°. Lorsqu'aucune des valeurs de y, tirées de $R = 0$, ne réduit à zéro l'un des multiplicateurs δ, δ', δ'',..., γ, γ', γ'',..., les solutions du système (4) sont les mêmes que celles du système (1); de sorte que $R = 0$ est l'*équation finale* en y (page 61). Ces conditions ont nécessairement lieu, quand les multiplicateurs δ, δ', δ'',..., γ, γ', γ'',..., sont des nombres, ou quand il n'existe aucun commun diviseur fonction de y entre R et l'un quelconque de ces multiplicateurs.

5°. Quand le reste R a un commun diviseur $\varphi(y)$ avec l'un des multiplicateurs δ, δ', δ'',..., γ, γ', γ'',..., le système (4) fournit souvent des valeurs de x et y qui ne conviennent pas au système (1); car dans ce cas, les valeurs de y tirées de $\varphi(y) = 0$, sont des racines de $R = 0$, et ces valeurs de y réduisent à zéro celui des multiplicateurs δ, δ',..., γ, γ',..., qui a le facteur commun $\varphi(y)$ avec R.

6°. *Lorsque le reste* R *est un nombre, le système* (1) *n'admet aucune solution;* car toutes les valeurs de y propres à satisfaire à ce système doivent réduire R à zéro (n° 42).

7°. Quand le reste R est identiquement nul, il existe une infinité de valeurs de x et y qui satisfont au système (1). En effet : les polynomes A, B, admettant alors pour plus grand commun diviseur, le reste R_1, qui précède R, si l'on divise A et B par R_1, on obtiendra des quotiens A', B', qui seront entiers et qui n'auront aucun facteur commun (n° 20). On aura $A = A'R_1$, $B = B'R_1$. Or, *pour qu'un produit de facteurs entiers devienne nul, il faut et il suffit que l'un de ses facteurs*

se réduise à zéro. Par conséquent : l'équation $R_1 = 0$, fournira une infinité de solutions du système (1)... $A = 0$, $B = 0$; et les autres solutions des équations (1) seront déterminées par le système (5)... $A' = 0$, $B' = 0$.

Quand le plus grand commun diviseur R_1 de A et B, renfermera les deux inconnues x, y, on pourra donner des valeurs arbitraires à l'une de ces inconnues, l'équation $R_1 = 0$, qui ne contiendra plus que l'autre inconnue, servira à déterminer les valeurs correspondantes de cette dernière inconnue. Lorsque R_1 ne contiendra que l'inconnue x, l'équation $R_1 = 0$ déterminera un nombre de valeurs de x marqué par le degré de R_1, et ces valeurs de x satisferont au système (1) quel que soit y.

Pour déterminer les solutions du système (5), on opérera comme si l'on cherchait le plus grand commun diviseur de A′ et B′, en ayant soin d'éviter les quotiens fractionnaires, et en ne supprimant dans les restes successifs aucun facteur fonction de y. On parviendra ainsi à un reste r indépendant de x. Ce reste ne sera jamais identiquement nul, car A′ et B′ sont premiers entre eux. Si r_1 désigne le reste qui précède r, le système (6)... $r = 0$, $r_1 = 0$, déterminera toutes les solutions des équations (5), et il pourra donner en outre des valeurs de x et y étrangères au système (5).

8°. *Lorsqu'une valeur* $\mathcal{C}$ *de* y, *tirée de* $R = 0$, *rend nul le reste* R_1 *qui précède* R, *cela indique que plusieurs valeurs de* x *peuvent correspondre à* $y = \mathcal{C}$. *Pour obtenir ces valeurs de* x, on observe que les solutions du système (1)... $A = 0$, $B = 0$, devant réduire tous les restes à zéro, *il suffit de faire* $y = \mathcal{C}$ *dans les restes qui précèdent* R_1, *jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste* $\varphi(x, y)$, *qui ne se réduise pas à zéro, lorsqu'on y fait* $y = \mathcal{C}$; *l'équation* $\varphi(x, \mathcal{C}) = 0$, *fournit les valeurs de* x *qui peuvent correspondre à* $y = \mathcal{C}$.

Si cette valeur $\mathcal{C}$ de y ne réduit à zéro aucune des quantités δ, δ', δ'',..., γ, γ', γ'', etc., par lesquelles on a multiplié les dividendes successifs pour parvenir au reste $\varphi(x, y)$, sans admettre des quotiens fractionnaires, chaque valeur α de x,

tirée de $\varphi(x, \mathcal{C}) = 0$, combinée avec $y = \mathcal{C}$, fournira une solution $x = \alpha$, $y = \mathcal{C}$, du système (1); ce qui déterminera un nombre de solutions des équations (1) marqué par le degré de l'équation $\varphi(x, \mathcal{C}) = 0$.

Si $y = \mathcal{C}$ réduit à zéro l'un des multiplicateurs δ, δ',..., γ, γ',..., des valeurs correspondantes de x, tirées de $\varphi(x, \mathcal{C}) = 0$, pourront ne pas convenir au système (1); on reconnaîtra celles de ces valeurs de x qui, conjointement avec $y = \mathcal{C}$, conviennent au système (1), en les substituant dans A et B.

Quand $y = \mathcal{C}$ réduira tous les restes à zéro, ainsi que A et B, les équations (1) admettront une infinité de solutions; car A et B contenant alors le facteur commun $y - \mathcal{C}$, la valeur $y = \mathcal{C}$ satisfera à ces équations quel que soit x.

Lorsque A *et* B *n'admettent aucun commun diviseur fonction de x ou de y, ou de x et y,* le reste R ne peut être identiquement nul; une valeur $y = \mathcal{C}$, tirée de $R = 0$, peut rendre tous les restes nuls, quel que soit x; mais elle ne saurait réduire A et B à zéro : car si cela arrivait, A et B auraient un commun diviseur $y - \mathcal{C}$; ce qui est contre l'hypothèse. Il n'existe donc qu'un nombre fini de valeurs de x correspondantes à $y = \mathcal{C}$. *Le système* (1)... $A = 0$, $B = 0$, *n'admet donc qu'un nombre fini de solutions.*

Réciproquement, *lorsque le système* (1) *n'admet qu'un nombre fini de solutions, les premiers membres* A, B, *ne peuvent avoir aucun commun diviseur fonction de x ou de y, ou de x et y;* car s'il existait un commun diviseur D de cette espèce, entre A et B, l'équation $D = 0$ fournirait une infinité de solutions du système (1).

9°. *Lorsque, dans le cours des divisions successives, l'un des restes est décomposable en facteurs, on peut simplifier les calculs;* car les solutions du système (1) réduisant deux restes consécutifs quelconques S, S', à zéro, si l'on sait décomposer S' en deux facteurs p, q, on obtiendra toutes les solutions du système (1), fournies par le système $S = 0$, $pq = 0$, en traitant séparément chacun des deux systèmes plus simples,

$$S = 0, \; p = 0, \quad \| \quad S = 0, \; q = 0.$$

10°. Lorsqu'une valeur C de y, tirée de $R=0$, réduit l'un des restes à un nombre, on est certain que cette valeur de y ne convient pas aux équations proposées, c'est-à-dire qu'il ne lui correspond aucune valeur finie de x; car les bonnes valeurs de x et y doivent réduire tous les restes à zéro. Par exemple, si l'on parvient aux restes $R_1=(y^2-1)x+y+2$, $R=y^3-1$; la valeur $y=1$, tirée de $R=0$, ne conviendra pas aux équations qui ont conduit à ces restes, car $y=1$ donnant $R_1=3$, aucune valeur finie de x ne pourra réduire R_1 à zéro. On peut d'ailleurs observer que $R_1=0$, donnant $x=-\frac{y+2}{y^2-1}$, la valeur de x correspondante à $y=1$ est $x=-\frac{3}{0}=-\infty$, et nous sommes convenus (n° 39) de n'admettre que les valeurs finies des inconnues.

44. Il est facile de voir que le but des calculs du n° 42 est de faire dépendre la résolution des équations proposées (1)... $A=0$, $B=0$, de celle de deux équations de la forme $F(y)=0$, $f(x,y)=0$. A cet effet, on opère comme s'il s'agissait de trouver le plus grand commun diviseur de A et B, avec cette seule différence, qu'on ne supprime dans les restes successifs aucun facteur fonction de y; on continue les calculs jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste R indépendant de x; le reste R_1 qui précède R est en général une fonction des inconnues, x, y; et le système (2)... $R=0$, $R_1=0$, traité par la méthode du n° 40, sert à déterminer les solutions du système (1).

Quand toutes les divisions s'effectuent sans qu'il soit nécessaire, pour éviter les quotiens fractionnaires, de multiplier des dividendes par des fonctions de y, les solutions du système (2) sont les mêmes que celles du système (1), (n° 42, 1er *cas*). Lorsque pour éviter les quotiens fractionnaires, on est obligé de multiplier des dividendes par des fonctions de y, ces multiplications peuvent introduire dans (2) des valeurs de x et y *étrangères* à (1); de sorte que le système (2), qui détermine toujours toutes les solutions du système (1), peut

donner en outre des valeurs de x et y qui ne satisfont pas aux équations (1)... $A=0$, $B=0$.

Enfin, si le coefficient du 1er terme d'un dividende partiel n'étant pas divisible par le coefficient du 1er terme du diviseur, on effectuait directement la division, sans rendre la division possible, en multipliant par une fonction de y, on obtiendrait au quotient un terme fractionnaire par rapport à y; et si l'on effectuait de cette manière toutes les divisions successives, sans multiplier les dividendes par des fonctions de y, les quotiens et les restes renfermeraient des termes fractionnaires par rapport à y. Nous allons faire voir que dans ce cas, le système (2) pourrait encore fournir des valeurs de x et y qui ne conviendraient pas au système (1), mais qu'il arriverait même quelquefois, que le système (2) ne donnerait pas toutes les solutions du système (1).

Soient r et r' deux restes consécutifs d'un rang quelconque, et supposons que la division de r par r', ne puisse pas conduire à un reste r'', d'un degré moindre (par rapport à x) que r', sans que le quotient renferme y dans le dénominateur; ce quotient, fractionnaire par rapport à y, mais entier par rapport à x, serait de la forme $\frac{N}{\varphi(y)}$, et l'on aurait

$$(3)\ldots r=\frac{Nr'}{\varphi(y)}+r''; \text{ d'où } (4)\ldots r''=r-\frac{Nr'}{\varphi(y)}.$$

Une solution $x=\alpha, y=\zeta$, du système (5)... $r'=0, r''=0$, pourrait ne pas convenir au système (6)... $r=0$, $r'=0$; car $y=\zeta$ pouvant réduire $\varphi(y)$ à zéro, l'expression (3) de r pourrait se présenter sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$; de sorte que l'on ignorerait si ces valeurs de x et y réduisent r à zéro.

Réciproquement, une solution $x=\alpha', y=\zeta'$, du système (6), pourrait ne pas convenir au système (5); car $y=\zeta'$ pouvant réduire $\varphi(y)$ à zéro, l'expression (4) de r'' pourrait se présenter sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$; de sorte qu'on ignorerait si r'' devient nul.

Les valeurs de x et y qui réduiraient deux restes consécutifs à zéro, ne seraient donc pas toujours les mêmes que celles qui réduiraient deux autres restes consécutifs à zéro.

Par conséquent, *si l'on admettait des quotiens fractionnaires, il arriverait quelquefois que des solutions du système* (2) *ne conviendraient pas au système* (1), *et que des solutions du système* (1) *ne conviendraient pas au système* (2). Ce qui démontre les propriétés énoncées.

45. Appliquons cette théorie générale à des exemples.

1er. Exemple. Soient les équations,

$$A = x^3 + 2yx^2 + 2y(y-2)x + y^2 - 4 = 0,$$
$$B = x^2 + 2yx + 2y^2 - 5y + 2 = 0.$$

La division de A par B donne le quotient x et le reste

$$R' = (y-2)x + (y^2-4).$$

Le coefficient 1 du 1er terme de B n'étant pas divisible par le coefficient $y-2$ du 1er terme de R', on multiplie B par $y-2$, et l'on divise $B(y-2)$ par R'; le 1er terme du quotient est x, et le reste est $r' = (y^2-4y+4)x + (y-2)(2y^2-5y+2)$.

Le coefficient y^2-4y+4 étant divisible par $y-2$, on divise r' par R', ce qui donne le quotient $y-2$ et le reste

$$R = (y-2)(y^2-5y+6).$$

L'équation $y^2-5y+6=0$, donnant $y=2$ et $y=3$, on a

$$R = (y-2)(y-2)(y-3).$$

La valeur $y=2$, tirée de $R=0$, peut ne pas convenir aux équations proposées, $A=0$, $B=0$, car elle réduit à zéro la quantité $y-2$ par laquelle on a multiplié B.

Pour trouver les valeurs de x correspondantes à $y=2$, on fait $y=2$ dans R'; ce qui réduit R' à zéro. On est donc conduit à faire $y=2$ dans $B=0$ (n° 43, 8°); ce qui donne $x^2+4x=0$; d'où $x=0$ et $x=-4$. Chacun des systèmes

$$y=2,\ x=0 \quad \| \quad y=2,\ x=-4,$$

convient aux équations proposées.

La valeur $y=3$, tirée de $R=0$, conviendra nécessairement aux équations proposées, car elle ne réduit pas à zéro, la quantité $y-2$ par laquelle on a multiplié B (n° 43, 1°). Pour obtenir la valeur de x correspondante à $y=3$, on fait $y=3$ dans $R'=0$, ce qui donne $x=-5$.

On voit que les équations proposées admettent les trois solutions distinctes

$$y=2, x=0 \;||\; y=2, x=-4 \;||\; y=3, x=-5.$$

On peut simplifier les calculs en observant que y^2-4 étant le produit de $y-2$ par $y+2$, le reste R′ de la division de A par B, contient le facteur $y-2$; de sorte que $R'=(y-2)(x+y+2)$; et comme on est parvenu au reste R′ sans multiplier le dividende A par une fonction de y, on est certain que les solutions des équations proposées sont les mêmes que celles des équations, $B=0$, $R'=0$, (n° 42); il suffit donc, pour obtenir ces solutions, de traiter séparément chacun des deux systèmes

$$B=0,\quad y-2=0 \;||\; B=0,\quad x+y+2=0.$$

Le 1er système fournit les deux solutions,

$$y=2, x=0 \;||\; y=2, x=-4.$$

Pour trouver les solutions du 2e système, on divise B par $x+y+2$; ce qui conduit au reste $R=y^2-5y+6$. Les équations $R=0$, $x+y+2=0$, déterminent les deux solutions $y=2, x=-4 \;||\; y=3, x=-5$, des équations proposées.

Enfin, on parvient aux mêmes résultats en éliminant y entre les équations proposées; à cet effet, on ordonne A et B par rapport aux puissances décroissantes de y, ce qui donne, $A=(2x+1)y^2+2(x-2)xy+(x^3-4)$,

$$B=2y^2+(2x-5)y+(x^2+2).$$

On divise 2A par B, ce qui conduit au reste

$$R'=5y-(x^2+4x+10).$$

On divise 5B par R′, le 1er terme du quotient est $2y$, et le

reste correspondant est

$$r' = (2x^2 + 18x - 5)y + 5(x^3 + 2).$$

Enfin, la division de $5r'$ par R′ donne le reste

$$R = 2x(x^3 + 13x^2 + 56x + 80).$$

Les solutions des équations proposées sont les mêmes que celles du système $R' = 0$, $R = 0$; car pour rendre les divisions possibles, il a suffi de multiplier les dividendes par des nombres (n° 43, 4°).

L'équation $R = 0$, donne $x = 0, x = -4, x = -4, x = -5$.

Les valeurs correspondantes de y, déduites de $R' = 0$, étant

$$y = 2, \quad y = 2, \quad y = 2, \quad y = 3,$$

on retrouve encore les trois solutions distinctes

$$y = 2, x = 0 \parallel y = 2, x = -4 \parallel y = 3, x = -5.$$

2e Exemple. Soient les deux équations

$$A = (y-1)x^2 + 2x - 5y + 3 = 0, \quad B = yx^2 + 9x - 10y = 0.$$

Nous allons donner plusieurs méthodes pour déterminer les solutions de ce système.

1re Méthode. On élimine x entre les équations proposées; à cet effet, on divise Ay par B, ce qui fournit le quotient entier $y - 1$, et le reste $R' = (9 - 7y)x + (5y - 7)y$.

On divise $B(9 - 7y)$ par R′; le 1er terme du quotient est yx, et le reste correspondant est

$$r' = (-5y^3 + 7y^2 - 63y + 81)x - 10(9 - 7y)y.$$

Le 1er terme de r' n'étant pas divisible par le 1er terme de R′, on divise $r' \times (9 - 7y)$ par R′, ce qui conduit au reste

$$R = 25y^5 - 70y^4 - 126y^3 + 414y^2 - 243y.$$

Ce reste ayant un commun diviseur, y, avec le multiplica-

teur y dont on a fait usage pour rendre la première division possible, le système $R = o$, $R' = o$, peut admettre des valeurs de x et y étrangères aux équations proposées (n° 43, 5°).

L'équation $R = o$, donne $y = o$; cette valeur de y, substituée dans $R' = o$, donne $x = o$. La solution $x = o$, $y = o$, du système $R = o$, $R' = o$, ne convient pas aux équations proposées, car elle ne réduit pas A à zéro.

Pour trouver l'équation qui fournit les autres valeurs de y, on divise R par y, et l'on égale le quotient à zéro, ce qui donne l'équation

$$(1)\ldots\ 25y^4 - 70y^3 - 126y^2 + 414y - 243 = o.$$

Le premier membre de l'équation (1) n'ayant pas de facteur commun avec les multiplicateurs y, $9 - 7y$, dont on a fait usage pour rendre les divisions possibles, aucune valeur de y tirée de (1) ne saurait réduire l'un de ces multiplicateurs à zéro ; toutes les valeurs de y, tirées de (1), conviendront donc nécessairement aux équations proposées (n° 43, 4°). L'équation (1) est donc *l'équation finale* en y, résultante de l'élimination de x entre les équations proposées.

L'équation (1) a deux racines commensurables, $y = 1$, $y = 3$; et en égalant à zéro le quotient $25y^2 + 30y - 81$, du 1er membre de (1) par le produit $y^2 - 4y + 3$ des facteurs $y - 1$, $y - 3$, on trouve que les deux autres racines de l'équation (1) sont

$$y = \frac{3}{5}(-1 + \sqrt{10}),\quad y = \frac{3}{5}(-1 - \sqrt{10}).$$

Pour obtenir les valeurs de x correspondantes aux quatre bonnes valeurs de y, on fait successivement

$$y = 1,\ y = 3,\ y = \frac{3}{5}(-1 + \sqrt{10}),\ y = \frac{3}{5}(-1 - \sqrt{10}),$$

dans $R' = o$, et l'on en déduit les valeurs demandées,

$x=1$, $x=2$, $x=-5-\sqrt{10}$, $x=-5+\sqrt{10}$ (*).

2e Méthode. On élimine y entre les équations proposées ; à cet effet, on ordonne A et B suivant les puissances décroissantes de y ; ce qui donne

$$A=(x^2-5)y-(x^2-2x-3),\quad B=(x^2-10)y+9x.$$

On divise $A(x^2-10)$ par B, ce qui donne le quotient x^2-5 et le reste

$$r=-(x^4+7x^3-13x^2-25x+30).$$

Ce reste n'ayant aucun facteur commun avec la quantité x^2-10 par laquelle il a fallu multiplier A pour rendre la division possible, les solutions du système (1)... $A=0$, $B=0$, sont les mêmes que celles du système $B=0$, $r=0$ (n° 43, 4°).

(*) En faisant $y=\frac{3}{5}(-1+\sqrt{10})$ dans $R'=0$, on trouve

$$x=\frac{13\sqrt{10}-40}{22-7\sqrt{10}}.$$

Pour obtenir une expression de x dont le dénominateur soit rationnel, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $22+7\sqrt{10}$; et en observant que $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b$, on trouve $x=-5-\sqrt{10}$.

On verrait de même que $y=\frac{3}{5}(-1-\sqrt{10})$, substitué dans $R'=0$, donne

$$x=-5+\sqrt{10}.$$

Mais cette substitution est inutile, car la 2e valeur de y ne différant de la 1re que par le signe de $\sqrt{10}$, la nouvelle valeur de x ne doit différer de la précédente que par le signe de $\sqrt{10}$.

En général, pour *transformer une fraction* $\frac{c}{a+\sqrt{b}}$ *en une fraction équivalente dont le dénominateur soit rationnel*, il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par $a-\sqrt{b}$, car

$$\frac{c}{a+\sqrt{b}}=\frac{c(a-\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}=\frac{c(a-\sqrt{b})}{a^2-b}.$$

De sorte que $r=0$ est l'équation finale en x résultante de l'élimination de y entre les équations proposées.

L'équation $r=0$, donne

$$x=1,\ x=2,\ x=-5-\sqrt{10},\ x=-5+\sqrt{10}.$$

Les valeurs correspondantes de y, déduites de $B=0$, sont

$$y=1,\ y=3,\ y=\frac{3}{5}(-1+\sqrt{10}),\ y=\frac{3}{5}(-1-\sqrt{10}).$$

Remarque. On parvient plus simplement à l'équation finale $r=0$, en égalant les deux valeurs de y tirées du système (1).

46. Pour *déterminer l'équation qui donne toutes les valeurs de x propres à satisfaire au système* $f(y)=0$, $\varphi(x,y)=0$, il suffit d'éliminer y entre les équations données; à cet effet, on ordonne $f(y)$ et $\varphi(x,y)$ par rapport aux puissances décroissantes de y; et l'on continue les calculs du n° 42 jusqu'à ce qu'on parvienne au reste R indépendant de y. L'équation $R=0$, détermine toutes les bonnes valeurs de x; mais lorsque pour éviter les quotiens fractionnaires, on a multiplié des dividendes partiels par des fonctions de x, l'équation $R=0$ peut donner en outre des valeurs de x qui ne conviennent pas aux équations proposées.

Exemple. Soient les équations

$$A=x^2-(2y+1)x+(y^2+y-2)=0,\ B=y^2-5y+6=0.$$

On ordonne A et B suivant les puissances décroissantes de y; ce qui donne

$$A=y^2+(1-2x)y+(x^2-x-2),\ B=y^2-5y+6.$$

La division de A par B, fournit le quotient $+1$ et le reste

$$R'=2(3-x)y+(x^2-x-8).$$

On divise $2(3-x)B$, par R'; le 1er terme du quotient est $+y$, et le reste est

$$r'=(-x^2+11x-22)y+12(3-x).$$

si $2y+1$ divise R, la valeur $y=-\frac{1}{2}$ tirée de $2y+1=0$, devra réduire R à zéro, et l'équation

$$(y^3+2y^2-y-2)y=0$$

ne saurait admettre une racine fractionnaire $-\frac{1}{2}$. Il résulte du principe du n° 43 (4°), que toutes les valeurs de y tirées de $R=0$, conviennent au système (1); de sorte que l'équation finale en y est $R=0$. Cette équation donne $y=0, y=1, y=-1, y=-2$; et en substituant successivement ces bonnes valeurs de y, dans l'équation $r'=0$, on trouve que les valeurs correspondantes de x sont -1, 0, $+2$, et $+1$.

Remarque. La propriété du n° 43 (9°), fournit le moyen de simplifier le calcul précédent. En effet; la division de $(2y+1)B$ par r' a donné le reste

$$r=(4y^2+3y-1)x+(2y+1)(y^2-1).$$

Or, $y^2-1=(y+1)(y-1)$; et il est facile de voir que r admet le facteur $y+1$ de y^2-1, car $y=-1$ réduit $4y^2+3y-1$ à zéro; le quotient de $4y^2+3y-1$ par $y+1$ étant $4y-1$, on voit que $r=(y+1)\{(4y-1)x+(2y+1)(y-1)\}$.

Toutes les solutions du système (1)... $A=0$, $B=0$, sont fournies par le système $r'=0$, $r=0$; et pour obtenir les solutions de ce dernier système, il suffit de traiter séparément chacun des deux systèmes

(2)... $r'=0, y+1=0$, || (3)... $r'=0, (4y-1)x+(2y+1)(y-1)=0$.

L'équation $y+1=0$ donne $y=-1$, et la substitution de cette valeur de y dans $r'=0$ donne $x=2$. La valeur $y=-1$ ne réduisant pas à zéro la quantité $2y+1$ par laquelle il a fallu multiplier le dividende B, pour éviter les fractions, la solution $y=-1$, $x=2$, du système (2), convient nécessairement au système (1), (n° 43, 1°).

Pour déterminer les solutions du système (3), on divise $(4y-1)r'$ par $(4y-1)x+(2y+1)(y-1)$, ce qui con-

duit au reste

$$R=(y-1)\left\{(2y+1)^2+(4y-1)\right\}=4y(y-1)(y+2).$$

L'équation $R=0$, donne $y=0$, $y=1$, $y=-2$. Les valeurs correspondantes de x, déduites de $r'=0$, sont -1, 0, $+1$; et comme aucune de ces valeurs de y ne réduit à zéro l'un des multiplicateurs $2y+1$, $4y-1$, dont on a fait usage pour rendre les divisions possibles, les trois solutions du système (3) conviennent nécessairement au système (1).

En général, *lorsque* A *étant le produit de m facteurs du* 1er *degré de la forme* $ax+by+c$, B *est le produit de n facteurs de la même forme, les équations* (1)... $A=0$, $B=0$, *qui sont respectivement du* $m^{ième}$ *et du* $n^{ième}$ *degré, admettent mn solutions communes au plus;* car, en égalant à zéro l'un quelconque des *m* facteurs de A et l'un quelconque des *n* facteurs de B, les deux équations du 1er degré qui en résultent fournissent une solution du système (1). Quand chacun des *mn* systèmes d'équations du 1er degré, ainsi formé, est possible et déterminé, on obtient *mn* solutions des équations (1). Quand plusieurs de ces systèmes deviennent contradictoires, le nombre *mn* des solutions diminue d'autant d'unités qu'il y a de systèmes contradictoires. Si tous les systèmes d'équations du 1er degré sont incompatibles, les équations (1) n'admettent pas de solutions communes. Enfin, lorsque l'un de ces systèmes devient indéterminé, A et B ont un facteur commun, et les équations (1) admettent une infinité de solutions. Par conséquent, si l'on élimine l'une des inconnues x, y, entre les équations (1), l'équation finale sera du degré *mn*, ou d'un degré moindre que *mn*, ou cette équation deviendra absurde (c'est-à-dire qu'elle conduira à l'égalité d'un nombre à zéro); enfin, l'équation finale pourra devenir identique.

48. La méthode qui a été donnée (n° 35) pour décomposer un polynome, fonction de x et y, en trois facteurs $f(x)$, $\varphi(y)$, $F(x, y)$, fournit le moyen de *simplifier les calculs relatifs à la recherche des solutions du système de deux équations* $P'=0$, $P''=0$, *entre deux inconnues* x *et* y. On décom-

pose chacun des polynomes P′, P″, en trois facteurs, ce qui conduit à des équations

(1)... $P' = XYDx'y'A = 0$, $P'' = XYDx''y''B = 0$, (page 49),

dans lesquelles X, x' et x'' ne peuvent contenir que la seule inconnue x ; Y, y' et y'' ne contiennent que y; D, A et B, contiennent x et y ; chacune des quantités x', y', A, est première avec l'une quelconque des quantités x'', y'', B ; de sorte que le plus grand commun diviseur de P′ et P″ est XYD. Les polynomes A, B, qui sont premiers entre eux, n'admettent aucun diviseur indépendant de l'une des inconnues x, y, ni aucun diviseur monome.

Un produit de facteurs entiers étant nul, lorsque l'un de ses facteurs se réduit à zéro, on obtiendra des solutions du système (1) en égalant successivement à zéro l'un quelconque des facteurs de P′, et l'un des facteurs de P″ ; les deux équations résultantes fourniront des solutions du système (1). L'ensemble de ces solutions déterminera toutes les valeurs des inconnues x, y, qui satisfont aux équations (1) proposées ; car on conçoit qu'un produit ne peut devenir nul que lorsqu'un de ses facteurs se réduit à zéro.

Discutons ces différens systèmes d'équations.

1°. On satisfait aux équations (1) en égalant à zéro l'un quelconque des facteurs X, Y, D, communs à P′ et P″.

L'équation $X = 0$ ne contenant que l'inconnue x, détermine un nombre limité de valeurs de x, avec chacune desquelles on peut combiner des valeurs arbitraires de y. De sorte que x est déterminé, tandis que y reste entièrement indéterminé.

L'équation $Y = 0$, détermine y ; et x reste arbitraire.

Enfin, l'équation $D = 0$, contenant x et y, on peut donner des valeurs quelconques à x ou à y ; l'équation résultante, ne renfermant plus que l'autre inconnue, fournit les valeurs correspondantes de cette dernière inconnue.

Ainsi, chacune des équations $X = 0$, $Y = 0$, $D = 0$, détermine une infinité de solutions des équations (1), et l'on obtient ces solutions en résolvant des équations à une seule inconnue.

2°. Les autres manières de satisfaire aux équations proposées consistent à égaler à zéro, en même temps, l'un des facteurs x', y', A, de P', et l'un des facteurs x'', y'', B, de P''; ce qui fournit neuf systèmes.

Or, aucune valeur de x ne saurait satisfaire au système $x' = 0$, $x'' = 0$; car si $x = a$ réduisait x' et x'' à zéro, ces deux fonctions de x seraient divisibles par $x - a$; ce qui ne peut avoir lieu, puisque x' et x'' sont premiers entre eux.

Par une raison semblable, le système $y' = 0$, $y'' = 0$, n'admet aucune solution.

Il ne reste donc que les sept systèmes possibles,

$$\begin{array}{l} x' = 0 \\ y'' = 0 \end{array} \Big\| \begin{array}{l} y' = 0 \\ x'' = 0 \end{array} \Big\| \begin{array}{l} x' = 0 \\ B = 0 \end{array} \Big\| \begin{array}{l} y' = 0 \\ B = 0 \end{array} \Big\| \begin{array}{l} x'' = 0 \\ A = 0 \end{array} \Big\| \begin{array}{l} y'' = 0 \\ A = 0 \end{array} \Big\| \begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0. \end{array}$$

Dans le 1er *système*, $x' = 0$, $y'' = 0$, chacune des valeurs de x, tirées de l'équation à une seule inconnue $x' = 0$, peut se combiner avec l'une quelconque des valeurs de y tirées de l'équation à une seule inconnue $y'' = 0$.

Par une raison semblable, on obtiendra les solutions du 2° *système*, $y' = 0$, $x'' = 0$, en combinant chacune des valeurs de y tirées de l'équation $y' = 0$, avec chacune des valeurs de x tirées de $x'' = 0$.

Dans le 3e *système*, $x' = 0$, $B = 0$, la 1re équation, ne contenant que la seule inconnue x, donnera un nombre limité de valeurs de cette inconnue, et chacune de ces valeurs, substituée dans $B = 0$, fournira une équation en y d'où l'on tirera les valeurs correspondantes de y.

On voit semblablement que chacun des trois systèmes

$$y' = 0,\ B = 0 \,\|\, x'' = 0,\ A = 0 \,\|\, y'' = 0,\ A = 0,$$

fournit un nombre limité de valeurs des inconnues x, y, et que l'on obtient ces valeurs en résolvant des équations à une seule inconnue.

Il ne reste donc qu'à *traiter le système* (2)... $A = 0$, $B = 0$, dans lequel A et B sont des fonctions de x et y qui n'ad-

mettent aucun facteur commun. Pour *éliminer x entre les équations* (2), on ordonne les polynomes A, B, par rapport aux puissances décroissantes de x, et en supposant que le plus fort exposant de x dans A ne soit pas moindre que dans B, on divise A par B; dans tout le cours de cette division, on évite les fractions en multipliant par des fonctions convenables de y (page 62); si a désigne le produit de toutes les quantités par lesquelles il a fallu multiplier les dividendes successifs pour parvenir à un reste R′ d'un degré moindre par rapport à x que le diviseur B, la division de Aa par B fournirait un quotient entier Q′ et le même reste R′ (page 63). On aura, $Aa = BQ' + R'$.

On prouvera, comme dans le n° 42, que le système (3)... $B = o$, $R' = o$, contient non-seulement toutes les solutions du système (2), mais que souvent il donne en outre des valeurs de x et y qui ne conviennent pas aux équations (2)... $A = o$, $B = o$.

Pour *déterminer les solutions du système* (3), on décompose le reste R′ en trois facteurs Y_t, X_t, R_t, (n° 35); de sorte que $R' = Y_t \times X_t \times R_t$.

Le facteur Y_t ne peut contenir que la seule inconnue y, et X_t ne peut contenir que la seule inconnue x; le facteur R_t est une fonction de x et y qui n'admet aucun diviseur indépendant de l'une des inconnues x, y. On obtiendra les solutions du système (3) en cherchant successivement les diverses solutions des trois systèmes

$$B = o,\ Y_t = o \;\|\; B = o,\ X_t = o \;\|\; B = o,\ R_t = o.$$

Dans le 1er système, l'équation à une seule inconnue $Y_t = o$ fournira des valeurs de y, et en les substituant successivement dans $B = o$, l'équation en x, qui résultera de cette substitution, fournira les valeurs correspondantes de x. On trouvera de cette manière toutes les solutions du système

$$B = o,\ Y_t = o.$$

On déterminera semblablement les solutions du 2e *système*, $X_t = o$, $B = o$, en résolvant des équations à une inconnue.

Enfin, pour calculer les solutions du 3e *système*, $B=0$, $R_1=0$, on divisera B par R_1, et l'on évitera les quotiens fractionnaires en multipliant les dividendes par des fonctions convenables de y (page 62); si b représente le produit de toutes les quantités par lesquelles il a fallu multiplier les dividendes successifs, pour n'obtenir que des termes entiers au quotient et pour parvenir au reste R'' d'un degré moindre (par rapport à x) que R_1, la division de Bb par R_1 fournira un quotient entier Q'' et le même reste R'' (page 63). On aura

$$Bb = R_1 Q'' + R''.$$

Le système (4)... $R_1=0$, $R''=0$, fournira toutes les solutions du 3e système, et quelquefois il donnera en outre des valeurs de x et y qui ne conviendront pas à ce 3e système.

On décomposera R'' en trois facteurs Y_2, X_2, R_2, et l'on obtiendra les solutions du système (4) en cherchant successivement les diverses solutions de chacun des trois systèmes

$$R_1=0,\ Y_2=0 \;||\; R_1=0,\ X_2=0 \;||\; R_1=0,\ R_2=0.$$

En continuant ces calculs, on parviendra à un reste R indépendant de x.

Le plus grand commun diviseur de A et B sera le même que celui de deux restes consécutifs quelconques (n° 32); et comme les polynomes A, B, sont premiers entre eux, il n'existera jamais de facteur commun entre deux restes consécutifs. Par conséquent, le reste R ne sera jamais identiquement nul, et le système (1) n'admettra qu'un nombre fini de solutions (n° 43, 8°).

1er Exemple. Soient

$$P' = 6y^6x^5 - 6y^4x^5 + 6y^7x^4 - 6y^6x^4 - 6y^7x^3 + 6y^6x^3 - 6y^5x^3 + 6y^4x^3 - 6y^6x^2 + 6y^5x^2,$$

$$P'' = 4y^4x^6 - 4y^3x^6 - 4y^4x^5 + 4y^3x^5 - 4y^6x^4 + 4y^5x^4 + 4y^6x^3 - 4y^5x^3.$$

En opérant comme dans le n° 35, on trouvera

$$X = 2(x-1)x^2,\ x'=3,\ x''=2x,$$

$$Y = (y-1)y^3,\ y'=y,\ y''=1,$$

$$D = x+y,\ A=(y+1)x+1,\ B=x-y.$$

Les formules (1)... $P' = XYDx'y'A$, $P'' = XYDx''y''B$, donneront

$$P' = 6y^4x^3(x-1)(y-1)(x+y)\{(y+1)x+1\},$$
$$P'' = 4y^3x^3(x-1)(y-1)(x+y)(x-y).$$

L'équation $X=0$ donne $x=0$ et $x=1$. Chacune de ces valeurs de x satisfait au système (1)... $P'=0$, $P''=0$, quel que soit y.

L'équation $Y=0$ donne $y=0$ et $y=1$. Chacune de ces valeurs de y satisfait au système (1) quel que soit x.

L'équation $D=0$ donnant $x=-y$, chaque valeur arbitraire de y fournit une valeur correspondante de x.

Les nombres x' et y'' ne pouvant pas se réduire à zéro, les systèmes $x'=0$, $y''=0 \parallel x'=0$, $B=0 \parallel y''=0$, $A=0$, n'admettent aucune solution.

Chacun des systèmes $y'=0$, $x''=0 \parallel y'=0$, $B=0$, donne $y=0$, $x=0$.

Le système $x''=0$, $A=0$, n'admet aucune solution finie, car $x''=0$ donne $x=0$ et $A=1$.

Enfin le système $A=0$, $B=0$, fournit les deux solutions

$$x=\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}) \Big\| x=\tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}),$$
$$y=\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}) \Big\| y=\tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}).$$

Le système (1) n'admet pas d'autres solutions.

2e Exemple. Soient les équations (1)... $P=0$, $Q=0$, dans lesquelles P et Q ont les valeurs indiquées (page 52). Si l'on décompose P et Q en facteurs, par l'une quelconque des méthodes du n° 37, on trouvera (page 54),

$$P = 2x(x-1)(y+1)(x-y)\times 6xy(x+1)(y-1)(x^2-yx-2y^2),$$
$$Q = 2x(x-1)(y+1)(x-y)\times(x+2)(y-3)(x+2y).$$

Pour *calculer toutes les solutions du système* (1), on égalera successivement à zéro l'un quelconque des facteurs de P et de Q. Ce qui conduira aux résultats suivans :

1°. L'équation $x(x-1)=0$, donne $x=0$, $x=1$.

Ces valeurs de x satisfont au système (1), quel que soit y.

2°. $y+1=0$ donne $y=-1$. Cette valeur de y satisfait au système (1), quel que soit x.

3°. La relation $x-y=0$, admet une infinité de valeurs de x et y, qui satisfont au système (1).

Telles sont les solutions fournies par l'égalité à zéro du plus grand commun diviseur de P et Q.

4°. $x+1=0$, $y-3=0$, donne $x=-1$, $y=3$.

5°. $x+1=0$, $x+2y=0$, donne $x=-1$, $y=\frac{1}{2}$.

6°. $y=0$, $x+2=0$, donne $y=0$, $x=-2$.

7°. $y=0$, $x+2y=0$, donne $y=0$, $x=0$.

8°. $y-1=0$, $x+2=0$, donne $y=1$, $x=-2$.

9°. $y-1=0$, $x+2y=0$, donne $y=1$, $x=-2$.

10°. $x+2=0$, $x^2-yx-2y^2=0$, donne

$$x=-2,\quad y=2 \parallel x=-2,\quad y=-1.$$

11°. $y-3=0$, $x^2-yx-2y^2=0$, donne

$$y=3,\quad x=6 \parallel y=3,\quad x=-3.$$

12°. Enfin, pour trouver les solutions fournies par le système $x^2-yx-2y^2=0$, $x+2y=0$,

on divise $x^2-yx-2y^2$ par $x+2y$, ce qui conduit au reste $4y^2$. Les solutions demandées sont déterminées par le système $4y^2=0$, $x+2y=0$, qui donne $y=0$, $x=0$.

Le système (1) n'admet pas d'autres solutions.

49. Pour *résoudre trois équations*

$$(1)\ldots P=0,\quad (2)\ldots Q=0,\quad (3)\ldots R=0,$$

qui renferment trois inconnues x, y, z, on élimine successivement z entre (1), (2), et (1), (3); cela conduit à deux équations $(4)\ldots F(x,y)=0$, $f(x,y)=0$, qui servent à déterminer x et y. L'élimination de x entre les équations (4) conduit à une équation $(5)\ldots \phi(y)=0$, qui donne toutes les valeurs de y. Soit C une de ces valeurs;

on fait $y = 6$ dans $F(x, y)$ et $f(x, y)$; on cherche le plus grand commun diviseur X, des résultats $F(x, 6)$, $f(x, 6)$; l'équation $X = 0$, fournit les valeurs de x correspondantes à $y = 6$; si α désigne une valeur de x tirée de $X = 0$, l'une des solutions des équations (4) est $x = \alpha, y = 6$. La substitution de ces valeurs de x et y, dans P, Q, R, fournit trois fonctions de z; on cherche le plus grand commun diviseur Z de ces fonctions de z; l'équation $Z = 0$ détermine les valeurs de z correspondantes à $x = \alpha$, $y = 6$.

EXEMPLE. Soient les trois équations (1)... $x + y + z - 6 = 0$, (2)... $x^2 - x^2 - y^2 - 4 = 0$, (3)... $z^2 + xy - x^2 - 7 = 0$.

L'élimination de z entre (1), (2), et entre (1), (3), donne

(4)... $(y-6)x - 6y + 16 = 0$, $3(y-4)x + y^2 - 12y + 29 = 0$.

Éliminant x entre ces deux dernières équations, il vient

$$(5)\ldots y^3 - 19y + 18 = 0.$$

L'équation (5) donne

$$y = 1, \quad y = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{73}).$$

Les valeurs correspondantes de x, déduites de (4), sont

$$x = 2, \quad x = \frac{1}{12}(7 \mp 5\sqrt{73}).$$

Et en substituant ces valeurs de x et y dans (1), on trouve que les valeurs correspondantes de z sont,

$$z = 3, \quad z = \frac{1}{12}(71 \mp \sqrt{73}).$$

Les signes supérieurs se correspondent, ainsi que les signes inférieurs. De sorte que le système des équations (1), (2), (3), proposées, admet trois solutions.

En général : la résolution de n équations d'un degré quelconque entre n inconnues, conduit à des équations dans chacune desquelles il n'entre qu'une seule inconnue.

Résolution des équations irrationnelles.

50. *Lorsque les inconnues entrent sous des radicaux, l'*ÉLIMINATION *donne le moyen de calculer les équations rationnelles qui déterminent les valeurs de ces inconnues;* à cet effet, on égale chaque radical à une nouvelle inconnue ; on fait ensuite disparaître les radicaux ; ce qui fournit des *équations rationnelles* entre les inconnues primitives et les nouvelles inconnues ; l'élimination de ces nouvelles inconnues conduit à des équations rationnelles entre les inconnues primitives, et nous avons vu comment on résout ces dernières équations.

1er EXEMPLE. Soit l'équation (1)... $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}=5$.

On fait $\sqrt{x}=y$ et $\sqrt{x-5}=z$; d'où,

(2)... $y+z=5$, (3)... $y^2=x$, (4)... $z^2=x-5$.

Pour obtenir l'*équation finale* en x, il suffit d'éliminer y et z entre (2), (3), (4); à cet effet, on remplace d'abord y par sa valeur $5-z$, tirée de (2); l'équation (3) devient (5)... $z^2-10z+25-x=0$; l'élimination de z entre (4) et (5) conduit à diviser $z^2-10z+(25-x)$ par $z^2-(x-5)$; ce qui donne le quotient $+1$ et le reste $-10(z-2)$; on divise $z^2-(x-5)$ par $z-2$, et le reste indépendant de z étant $-x+9$, l'équation finale demandée est $-x+9=0$; d'où $x=9$. Cette valeur de x satisfait à l'équation (1).

REMARQUE. Le seul moyen de rendre l'équation (1) rationnelle, est de faire disparaître les radicaux en les élevant au quarré ; ce qui fait disparaître le double signe dont la valeur de chaque radical doit être affectée ; chacune des équations,

$$(6)...\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{x-5}=5, & -\sqrt{x}+\sqrt{x-5}=5,\\ & -\sqrt{x}-\sqrt{x-5}=5,\end{cases}$$

conduirait donc à la même valeur $x=9$; et cependant, en ne prenant que la valeur arithmétique de chaque radical, la valeur $x=9$ ne satisfait à aucune des équations (6).

En général, *lorsqu'on fait disparaître les radicaux contenus dans des équations, les valeurs des inconnues, tirées des équa-*

tions rationnelles qui en résultent, peuvent ne convenir qu'à certaines combinaisons des diverses valeurs dont ces radicaux sont susceptibles.

2° EXEMPLE. Soient les équations,

$$(1)\ldots \sqrt{x}+\sqrt{y-1}=2,\quad (2)\ldots \sqrt{x+8}-\sqrt{y+2}=1.$$

On fait, $\sqrt{x}=z$, $\sqrt{y-1}=t$, $\sqrt{x+8}=v$, $\sqrt{y+2}=u$; d'où,

$$(3)\ldots z^2=x,\quad (4)\ldots t^2=y-1,\quad (5)\ldots v^2=x+8,$$
$$(6)\ldots u^2=y+2,\quad (7)\ldots z+t=2,\quad (8)\ldots v-u=1.$$

Pour obtenir les deux *équations rationnelles* qui déterminent les valeurs des inconnues x, y, il suffit d'éliminer z, t, v et u, entre les équations (3), (4), (5), (6), (7), (8); à cet effet, on élimine successivement les inconnues z, t, entre (3), (4), (7), et les inconnues v, u, entre (5), (6), (8), ce qui conduit aux équations demandées,

$$(9)\ldots\ x^2-2(y+3)x+(y^2-10y+25)=0,$$
$$(10)\ldots\ x^2-2(y-5)x+(y^2-14y+17)=0.$$

Si l'on élimine x entre les équations (9) et (10), par la méthode du n° 42, les deux derniers restes seront

$$R_1=-4(4x-y-2),\quad R=9y^2-196y+356.$$

Et comme on est parvenu à ces restes, sans multiplier les dividendes par des fonctions de y, les solutions du système (9) et (10) sont les mêmes que celles du système $R=0$, $R_1=0$.

Les solutions de ce dernier système sont

$$(11)\ldots y=2,\quad x=1 \;\Big\|\; (12)\ldots y=\frac{178}{9},\quad x=\frac{49}{9}.$$

Le système (11) donne une *solution arithmétique* des équations (1) et (2) proposées.

Le système (12) convient aux équations

$$-\sqrt{x}+\sqrt{y-1}=2,\quad -\sqrt{x+8}+\sqrt{y+2}=1.$$

REMARQUE. Les autres systèmes, que l'on déduirait des équations (1) et (2) en changeant les signes des radicaux, n'admettraient aucune solution arithmétique.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

§ Ier. *Règle des signes de* DESCARTES.

N^os.		Pages.
1... 7.	Notions préliminaires	1... 4
8.	Règle des signes de *Descartes*	4... 9
9.	Méthode très simple pour déterminer combien une équation incomplète peut admettre au plus de racines réelles négatives	9 et 10
10 et 11.	Méthodes nouvelles pour *déterminer combien une équation contient au moins de racines imaginaires.* En désignant par n un nombre entier positif quelconque, *s'il manque* $2n$ *ou* $2n+1$ *termes entre deux termes de signes contraires, l'équation admet au moins* $2n$ *racines imaginaires, et s'il manque* $2n+1$ *ou* $2n+2$ *termes entre deux termes de même signe, l'équation admet au moins* $2n+2$ *racines imaginaires*	10...14
12 et 13.	Examen des cas dans lesquels on ne peut pas reconnaître si une équation admet des racines imaginaires	14 et 15

§ II. *Propriétés des facteurs premiers. Théorie du plus grand commun diviseur.*

14.	Notions préliminaires	15 et 16
15..17.	Propriétés des facteurs premiers	16...24
18.	Définition générale du *plus grand commun diviseur*	24
19.	*Le plus grand commun diviseur de plusieurs quantités entières, numériques ou littérales, est le produit de tous les facteurs premiers communs à ces quantités, chacun de ces facteurs communs étant affecté du plus petit de ses exposans dans les quantités données*	24 et 25
20.	Lorsqu'on divise des quantités par leur plus grand commun diviseur, les quotiens n'admettent aucun facteur commun	25
21.	*Déterminer la plus petite quantité par laquelle il faut multiplier une quantité donnée, pour que le produit soit divisible par une quantité donnée*	25 et 26
22.	*Déterminer la plus petite quantité divisible par des quantités données*	26 et 27
23...26.	Du plus grand commun diviseur monome	27
27.	Principes nécessaires à la recherche du plus grand commun diviseur entre des polynomes	28 et 29

N^os.		Pages.
28...33.	1re *méthode*, pour calculer le plus grand commun diviseur entre des polynomes	29...44
34.	2e *méthode*	44
35.	Décomposer un polynome fonction de deux lettres, x, y, en trois facteurs	44...46
36...38.	3e *méthode*, pour calculer le plus grand commun diviseur entre des polynomes, en décomposant les polynomes et les restes successifs en facteurs	46...54

§ III. *Résolution de deux équations à deux inconnues. Théorie de l'Élimination.*

39.	Notions préliminaires	55
40.	On obtient toutes les solutions du système $F(y) = 0$, $f(x, y) = 0$, en résolvant des équations à une seule inconnue	55
41.	Déterminer toutes les solutions du système $F(x, y) = 0$, $f(x, y) = 0$, quand l'une de ces équations est du 1er ou du 2e degré par rapport à l'une des inconnues.	56...59
42.	Le procédé du plus grand commun diviseur donne le moyen de faire dépendre la résolution de deux équations à deux inconnues x, y, de la recherche des solutions d'un système de la forme $F(y) = 0, f(x, y) = 0$.	59...66
43.	Discussion des différens cas qui peuvent se présenter	66...70
44.	On doit éviter les quotiens fractionnaires	70...72
45.	Exemples	72...77
46.	Déterminer l'*équation finale* qui donne toutes les valeurs de x propres à satisfaire au système $f(y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$	77 et 78
47.	Recherche des solutions du système de deux équations dont les premiers membres sont décomposés en plusieurs facteurs	78...81
48.	*Méthode nouvelle* pour déterminer les solutions de deux équations à deux inconnues, en décomposant les premiers membres de ces équations, et les restes successifs, en facteurs	81...87
49.	Résoudre n équations entre n inconnues	87 et 88
50.	Résolution des *équations irrationnelles*	89 et 90

FIN DE LA TABLE.

$S_1 = (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d})$

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.